и начала математического анализа

В двух частях

Часть 2

ЗАДАЧНИК

для учащихся общеобразовательных учреждений

(базовый уровень)

Под редакцией А. Г. Мордковича

Рекомендовано Министерством образования и науки Российской Федерации

10-е издание, стереотипное

ИЗДАТЕЛЬСТВО МНЕМОЗИНА

Москва 2009

УДК 373.167.1:[512+517]
ББК 22.141я721+22.161я721
А45

На учебник получены положительные заключения Российской академии наук (№ 10106—5215/9 от 31.10.2007) и Российской академии образования (№ 01—666/5/7д от 29.10.2007)

Авторы:
А. Г. Мордкович, Л. О. Денищева, Т. А. Корешкова, Т. Г. Мишустина, П. В. Семенов, Е. Е. Тульчинская

Алгебра и начала математического анализа. 10—11 классы.
А45 В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / [А. Г. Мордкович и др.] ; под ред. А. Г. Мордковича. — 10-е изд., стер. — М. : Мнемозина, 2009. — 239 с. : ил.

ISBN 978-5-346-01137-8

Предлагаемый задачник по курсу «Алгебра и начала математического анализа» в 10—11-м классах соответствует одноименному учебнику. В каждом параграфе задачника представлена разнообразная система упражнений, включающая четыре уровня — по степени нарастания трудности.

УДК 373.167.1:[512+517]
ББК 22.141я721+22.161я721

ISBN 978-5-346-01135-4 (общ.)
ISBN 978-5-346-01137-8 (ч. 2)

Предисловие для учителя

Издательство «Мнемозина» подготовило учебный комплект для изучения в 10—11 классах общеобразовательной школы курса алгебры и начал математического анализа на предусмотренном государственным стандартом базовом уровне:

А. Г. Мордкович. Алгебра и начала математического анализа. 10—11 классы. В 2 ч. Ч. 1. Учебник.

А. Г. Мордкович и др. Алгебра и начала математического анализа. 10—11 классы. В 2 ч. Ч. 2. Задачник.

Л. А. Александрова. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Самостоятельные работы / Под ред. А. Г. Мордковича.

Л. А. Александрова. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Самостоятельные работы / Под ред. А. Г. Мордковича.

У вас в руках вторая книга комплекта — задачник.

Наличие отдельного задачника позволило авторам выстроить в нем полноценную как по объему, так и по содержанию, систему упражнений, достаточную для работы в классе, для домашних заданий, для повторения (без привлечения других источников). В каждом параграфе представлены упражнения трех уровней сложности: простые, средние (слева от номера такого упражнения помещен знак «○») и повышенной сложности (слева от номера такого упражнения помещен знак «●»). Нумерация упражнений своя в каждом параграфе. К большинству задач второго и третьего уровней в конце книги приведены ответы.

В каждом номере одно, два (а) и б)) или четыре (а)—г)) задания. Все они в пределах конкретного номера однотипны, поэтому советуем вам разбирать в классе пункт а) (или пункты а) и б)), а на дом задавать пункт б) (или соответственно пункты в) и г)).

Этот задачник естественным образом соотносится с известным задачником «Алгебра и начала анализа, 10—11» (издательство «Мнемозина», авторы — А. Г. Мордкович и др.), который с 2000 года используется в общеобразовательных школах России. Но есть и отличия. Во-первых, появились две новые главы («Числовые функции» и «Элементы комбинаторики. Теории вероятностей и математической статистики»), во-вторых, из-за сокращения количества часов на изучение курса алгебры и начал анализа на базовом уровне по сравнению с тем, что было в 2000—2006 гг., пришлось несколько сократить содержание практически всех параграфов. Тем не менее число упражнений остается явно избыточным по сравнению с тем, что реально можно успеть сделать со школьниками при предусмотренных учебным планом четырех часах в неделю на изучение всего курса математики (включая геометрию). Мы сознательно пошли на это, чтобы у учителя отсутствовала необходимость обращаться к другим источникам, а учащиеся, решившие все-таки поступать в вузы негуманитарного профиля, были бы для этого достаточно подготовлены.

Имеющаяся преемственность с нашим старым задачником даст учителю, работавшему ранее по задачнику для общеобразовательной школы, возможность более комфортно перейти на работу по настоящему задачнику, ориентированному на базовый уровень изложения материала.

В планы издательства входит выпуск пособия для учителей и сборника контрольных работ по курсу алгебры и начал математического анализа для 10—11-го классов (базовый уровень). Пока их нет, приводим в конце учебника вариант примерного тематического планирования.

Авторы

ГЛАВА 1 Числовые функции

§ 1. Определение числовой функции и способы ее задания

1.1. Из заданного соотношения выразите переменную y через переменную x:

а) $3x + 4y = 12$; в) $6y - 5x + 1 = 0$;

б) $2xy + y = -7$; г) $\frac{9}{xy} - 4 = 3x$.

Будет ли полученное соотношение задавать функцию?

1.2. Для функции $y = f(x)$, где $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7$, найдите:

а) $f(1)$; б) $f(3)$; в) $f(-2)$; г) $f(1,5)$.

○1.3. Для функции $y = f(x)$, где $f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 4}{3x + 3}$, найдите:

а) $f(x - 2)$; б) $f(-x^3)$; в) $f\left(\frac{1}{x}\right)$; г) $f(2x^2 + 3x + 5)$.

Найдите область определения функции:

1.4. а) $y = \frac{3x - 2}{5x + 3}$; в) $y = \frac{5 + 6x}{2x - 4}$;

б) $y = \frac{6}{x^2 - 16}$; г) $y = \frac{7}{25 - x^2}$.

1.5. а) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$; в) $y = \sqrt{x^2 + 4x - 12}$;

б) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$; г) $y = \sqrt{\frac{3}{49 - x^2}}$.

○1.6. а) $y = \sqrt{2x - 4} + \frac{2x + 3}{\sqrt{10 - 2,5x}}$;

б) $y = \sqrt{10x - 3x^2 - 3} + \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 4}} - \frac{1}{25 - 4x^2}$;

в) $y = \sqrt{2x^2 - 5x + 2} + \frac{2x^2 - 4}{\sqrt{10 - 2x}}$;

г) $y = \sqrt{x^2 - 36} + \frac{5x + 3}{\sqrt{11x - x^2 - 10}} - \frac{\sqrt[3]{x}}{x^4 - 2401}$.

Постройте график заданной функции, найдите область определения и область значений функции:

1.7. а) $y = 2x - 3$; в) $y = \frac{x}{2} + 4$;

б) $y = 6 - 3x$; г) $y = -\frac{2x}{3} - 3$.

1.8. а) $y = x^2 + 2$; в) $y = \frac{1}{2}x^2 - 4$;

б) $y = 3 - 2x^2$; г) $y = -1{,}5x^2 - 2$.

1.9. а) $y = \sqrt{x}$; в) $y = -\sqrt{x}$;

б) $y = \sqrt{x - 3}$; г) $y = -\sqrt{x} + 2$.

○1.10. а) $y = x^2 + 3x - 28$; б) $y = -x^2 - 2x + 24$.

○1.11. а) $y = \frac{1}{x} + 3$; в) $y = \frac{-2}{x} - 1$;

б) $y = \frac{5}{x + 3}$; г) $y = \frac{4}{1 - x}$.

○1.12. а) $y = |x|$; б) $y = |x - 2|$; в) $y = -|x|$; г) $y = 3 - |x|$.

●1.13. Найдите область определения и область значений функции:

а) $y = \frac{1}{16x^2 - 49}$; в) $y = \frac{1}{9 - 25x^2}$;

б) $y = \sqrt{x^2 + 4x + 3}$; г) $y = \sqrt{3x - x^2 + 18}$.

○1.14. Используя график функции $y = f(x)$, изображенный на рис. 1, постройте график функции:

а) $y = f(-x)$; в) $y = -f(-x)$;

б) $y = -f(x)$; г) $y = f(x - 1) + 2$.

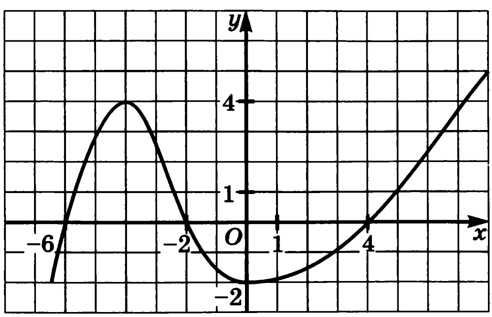

Рис. 1

●1.15. Используя график функции $y = f(x)$, где $f(x) = x^2 - 4x + 3$, постройте график функции:

а) $y = f(|x|)$; б) $y = |f(x)|$; в) $y = |f(|x|)|$; г) $y = -|f(|x|)|$.

○1.16. Решите графически уравнение:

а) $x^3 = 3 - 2x$; в) $|x - 2| = \frac{3}{x}$;

б) $\sqrt{x} = 2x - 6$; г) $x^{-2} = 5x - 4$.

○1.17. Функция $y = f(x)$ задана следующим правилом: каждому неотрицательному числу ставится в соответствие вторая цифра после запятой в записи числа в виде бесконечной десятичной дроби. Найдите:

а) $f\left(\frac{1}{4}\right)$; б) $f\left(\sqrt{2}\right)$; в) $f\left(1\frac{1}{6}\right)$; г) $f\left(\left(\sqrt{5}\right)^2\right)$.

○1.18. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, \text{ если } 0 < x < 1, \\ \sqrt{x}, \text{ если } x \geqslant 1. \end{cases}$

а) Найдите $f(6{,}25)$; $f(0{,}01)$; $f(-3)$;
б) постройте график функции;
в) найдите $D(f)$;
г) найдите $E(f)$.

○1.19. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 5, \text{ если } -4 \leqslant x < 0, \\ 5 - 2x, \text{ если } 0 \leqslant x < 2, \\ \frac{2}{x}, \text{ если } x \geqslant 2. \end{cases}$$

а) Найдите $f(-5)$; $f(-3)$; $f(0)$; $f(4)$;
б) постройте график функции;
в) найдите $D(f)$;
г) найдите $E(f)$.

§ 2. Свойства функции

2.1. Используя свойства числовых неравенств, исследуйте функцию на монотонность:

а) $y = 8x + 3$; в) $y = \frac{x}{3} + 1$;

б) $y = 5 - 2x$; г) $y = \frac{1}{3} - \frac{2x}{5}$.

Используя свойства числовых неравенств, исследуйте функцию на монотонность:

2.2. а) $y = 2x^3 - 3$; в) $y = \frac{2}{3} - x^3$;

б) $y = 7 - \frac{x^3}{2}$; г) $y = 4 + x^3$.

○2.3. а) $y = x^2 + 2x + 1,\ x \geqslant -1$; в) $y = -x^2 + 6x - 12,\ x \geqslant 3$;

б) $y = \frac{1}{x+2},\ x < -2$; г) $y = \frac{-2}{x+5},\ x > -5$.

○2.4. а) $y = x^3 + 2x$; в) $y = 4 - x^5$.

б) $y = 5 - x^3 - 6x^9$; г) $y = x^7 + x^5 - 3$.

○2.5. а) $y = \sqrt{x^3 + 1}$; в) $y = 2 - \sqrt{x}$;

б) $y = 5 - x^5 - \sqrt{2x^3}$; г) $y = \sqrt{x^7} + x - 1$.

Исследуйте функцию на ограниченность:

○2.6. а) $y = x^2 - 8x + 1$; в) $y = -2x^2 - 6x + 15$;

б) $y = \frac{2x-4}{x},\ x > 0$; г) $y = \frac{5-2x}{1-x},\ x < 1$.

○2.7. а) $y = \sqrt{-x^2 + 4x - 5}$; в) $y = \sqrt{-2x^2 + 8x + 9}$;

б) $y = \sqrt{\frac{x^2 - 4x + 1}{5}}$; г) $y = \sqrt{\frac{5}{2x^2 - 4x + 2}}$.

Найдите наименьшее и наибольшее значение функции:

2.8. а) $y = 3 - 2x,\ x \in [-1; 3]$;

б) $y = -2x^2 + 2x,\ x \in [-3; 2]$;

в) $y = 3 - 4x,\ x \in (-\infty; 3]$;

г) $y = x^2 + 4x + 5,\ x \in (0; 1]$.

2.9. а) $y = \sqrt{x},\ x \in [2; +\infty)$; в) $y = \sqrt{x},\ x \in [1{,}44; 6{,}25]$;

б) $y = -\sqrt{x},\ x \in [1; 9]$; г) $y = -\sqrt{x},\ x \in (0; 1{,}69]$.

○2.10. а) $y = 2|x| - 1,\ x \in [-3; 2]$; в) $y = 1{,}5 - |5x|,\ x \in [-8; 2]$;

б) $y = 3 - |2x|,\ x \in (-5; 4]$; г) $y = 6|x| - 2,\ x \in [-10; 4)$.

2.11. Исследуйте функцию на четность:

а) $y = x_2 + 2x_4 + 1$; в) $y = \frac{-3x^2 + 1}{1 - x^4}$;

б) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$; г) $y = 5 - 3x^3$.

Постройте и прочитайте график функции:

○2.12. $y = \begin{cases} \dfrac{3}{x}, \text{ если } x < 0, \\ 3\sqrt{x}, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$

○2.13. $y = \begin{cases} 4 - 2x^2, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ x + 1, \text{ если } 1 < x \leqslant 3. \end{cases}$

○2.14. $y = \begin{cases} 2, \text{ если } -3 \leqslant x \leqslant 0, \\ \sqrt{x} + 1, \text{ если } 1 < x \leqslant 4, \\ (x - 5)^2 + 2, \text{ если } 4 < x \leqslant 6. \end{cases}$

○2.15. $y = \begin{cases} x^3, \text{ если } x < 0, \\ -x^2 + 2x + 2, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ x, \text{ если } 2 < x \leqslant 4. \end{cases}$

§ 3. Обратная функция

Для заданной функции найдите обратную функцию:

3.1. а) $y = 3x - 1$; в) $y = 5x + 2$;
б) $y = 2 + 4x$; г) $y = 3 - x$.

○3.2. а) $y = \dfrac{x + 1}{2x - 3}$; в) $y = \dfrac{3 - 2x}{5x + 1}$;
б) $y = \dfrac{4 - 3x}{1 + x}$; г) $y = \dfrac{2x - 5}{1 + 2x}$.

Для заданной функции найдите обратную; постройте график заданной функции и обратной функции:

○3.3. а) $y = x^2$, $x \geqslant 0$; в) $y = (x - 1)^2$, $x \leqslant 1$;
б) $y = \sqrt{x}$; г) $y = \sqrt{-x}$.

○3.4. а) $y = x^3$; в) $y = 1 - x^3$;
б) $y = (x - 2)^3$; г) $y = (x + 3)^3 - 1$.

●3.5. Выясните, существует ли обратная функция для заданной функции. Если да, то задайте обратную функцию аналитически, постройте график заданной и обратной функций:
а) $y = x^2 + 4x - 8$, $x \in [-3; 0]$;
б) $y = x^2 + 4x - 8$, $x \in (-\infty; -2)$;
в) $y = -x^2 + 2x + 6$, $x \in [0; 3]$;
г) $y = -x^2 + 2x + 6$, $x \in [3; +\infty)$.

ГЛАВА 2 Тригонометрические функции

§ 4. Числовая окружность

Горизонтальный диаметр CA и вертикальный диаметр DB разбивают единичную окружность на четыре четверти: AB — первая, BC — вторая, CD — третья, DA — четвертая (рис. 2). Опираясь на эту геометрическую модель, решите следующие задачи.

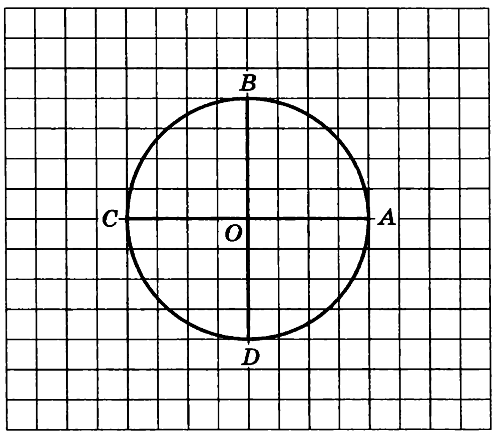

Рис. 2

4.1. Вторая четверть разделена пополам точкой M, а третья четверть разделена на три равные части точками K и P. Чему равна длина дуги: AM, BK, MP, DC, KA, BP, CB, BC?

4.2. Первая четверть разделена на две равные части точкой M, а четвертая — на три равные части точками K и P. Чему равна длина дуги: AM, BD, CK, MP, DM, MK, CP, PC?

4.3. Первая четверть разделена точкой M в отношении $2:3$. Чему равна длина дуги: AM, MB, DM, MC?

4.4. Третья четверть разделена точкой P в отношении $1:5$. Чему равна длина дуги: CP, PD, AP?

Найдите на числовой окружности точку, которая соответствует заданному числу:

4.5. а) $\frac{\pi}{2}$; б) π; в) $\frac{3\pi}{2}$; г) 2π.

4.6. а) 7π; б) 4π; в) 10π; г) 3π.

4.7. а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{6}$; г) $\frac{\pi}{8}$.

4.8. а) $\frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{3\pi}{4}$; в) $\frac{5\pi}{6}$; г) $\frac{5\pi}{4}$.

4.9. а) $\frac{4\pi}{3}$; б) $\frac{5\pi}{3}$; в) $\frac{7\pi}{6}$; г) $\frac{11\pi}{6}$.

4.10. а) $-\frac{\pi}{2}$; б) $-\frac{2\pi}{3}$; в) -2π; г) $-\frac{3\pi}{4}$.

4.11. а) $\frac{25\pi}{4}$; б) $-\frac{26\pi}{3}$; в) $-\frac{25\pi}{6}$; г) $\frac{16\pi}{3}$.

4.12. Что вы можете сказать о взаимном расположении точек, соответствующих заданным числам, на координатной прямой и на числовой окружности?

а) t и $-t$; в) t и $t+\pi$;

б) t и $t+2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; г) $t+\pi$ и $t-\pi$?

4.13. Найдите все числа, которым соответствует на числовой окружности точка:

а) $M_1\left(\frac{\pi}{4}\right)$; б) $M_2(5)$; в) $M_3\left(\frac{3\pi}{4}\right)$; г) $M_4(-3)$.

4.14. Найдите все числа, которым соответствуют на числовой окружности заданные точки (рис. 2):

а) A; б) C; в) A и C.

4.15. Найдите все числа, которым соответствуют на числовой окружности заданные точки (рис. 2):

а) B; б) D; в) B и D.

О4.16. Найдите на числовой окружности точку, которая соответствует числу:

а) 1; б) -5; в) 4,5; г) -3.

Какой четверти числовой окружности принадлежит точка, соответствующая числу:

○4.17. а) 6; б) 2; в) 3; г) 4.

○4.18. а) 5; б) −5; в) 8; г) −8.

Найдите все числа t, которым на числовой окружности (рис. 2) соответствуют точки, принадлежащие указанной открытой дуге (т. е. дуге без ее концов):

○4.19. а) AM; б) CM; в) MA; г) MC.
(M — середина первой четверти.)

○4.20. а) DM; б) BD; в) MD; г) DB.
(M — середина второй четверти.)

§ 5. Числовая окружность на координатной плоскости

Центр числовой окружности совпадает с началом координат на координатной плоскости xOy. Найдите декартовы координаты заданной точки:

5.1. а) $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$; б) $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$; в) $M\left(\frac{\pi}{6}\right)$; г) $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

5.2. а) $M(2\pi)$; б) $M\left(\frac{7\pi}{2}\right)$; в) $M\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$; г) $M(15\pi)$.

5.3. а) $M\left(\frac{15\pi}{4}\right)$; б) $M\left(\frac{16\pi}{3}\right)$; в) $M\left(-\frac{31\pi}{4}\right)$; г) $M\left(-\frac{26\pi}{3}\right)$.

Найдите наименьшее положительное и наибольшее отрицательное числа, которым на числовой окружности соответствует точка с координатами:

5.4. а) $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}\right)$; в) $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$;

б) $M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}\right)$; г) $M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$.

5.5. а) $M\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; в) $M\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

б) $M\left(-\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; г) $M\left(\frac{1}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Найдите на числовой окружности точки с данной ординатой и запишите, каким числам t они соответствуют:

5.6. а) $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $y = \frac{1}{2}$; в) $y = 0$; г) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

5.7. а) $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $y = 1$; в) $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $y = -1$.

Найдите на числовой окружности точки с данной абсциссой и запишите, каким числам t они соответствуют:

5.8. а) $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $x = \frac{1}{2}$; в) $x = 1$; г) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5.9. а) $x = 0$; б) $x = -\frac{1}{2}$; в) $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $x = -1$.

О5.10. Укажите знаки абсциссы и ординаты точки числовой окружности:

а) $E(2)$; б) $K(-4)$; в) $F(-1)$; г) $L(6)$.

Найдите на числовой окружности точки с абсциссой или ординатой, удовлетворяющей заданному неравенству, и запишите (с помощью двойного неравенства), каким числам t они соответствуют:

О5.11. а) $x > 0$; б) $x < \frac{1}{2}$; в) $x > \frac{1}{2}$; г) $x < 0$.

О5.12. а) $x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $x \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.

О5.13. а) $y > 0$; б) $y < \frac{1}{2}$; в) $y > \frac{1}{2}$; г) $y < 0$.

О5.14. а) $y < \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $y > -\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $y \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $y \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.

§ 6. Синус и косинус. Тангенс и котангенс

Вычислите $\sin t$, $\cos t$ и $\operatorname{tg} t$, если:

6.1. а) $t = 0$; б) $t = \frac{\pi}{2}$; в) $t = \frac{3\pi}{2}$; г) $t = \pi$.

6.2. а) $t = -2\pi$; б) $t = -\frac{\pi}{2}$; в) $t = -\frac{3\pi}{2}$; г) $t = -\pi$.

6.3. а) $t = \frac{5\pi}{6}$; б) $t = \frac{5\pi}{4}$; в) $t = \frac{7\pi}{6}$; г) $t = \frac{7\pi}{4}$.

Вычислите $\sin t$, $\cos t$ и $\operatorname{tg} t$, если:

6.4. а) $t = -\frac{7\pi}{4}$; б) $t = -\frac{4\pi}{3}$; в) $t = -\frac{5\pi}{6}$; г) $t = -\frac{5\pi}{3}$.

6.5. а) $t = \frac{13\pi}{6}$; б) $t = -\frac{8\pi}{3}$; в) $t = \frac{23\pi}{6}$; г) $t = -\frac{11\pi}{4}$.

Вычислите:

О6.6. а) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos\frac{\pi}{3} + \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$;

б) $\cos\frac{\pi}{6} \cdot \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{3} \cdot \cos\frac{\pi}{2}$;

в) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cos(-\pi) + \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$;

г) $\sin\frac{\pi}{6} \cdot \sin\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{\pi}{3} \cdot \sin\frac{\pi}{2}$.

О6.7. а) $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 \cdot \sin\frac{\pi}{2}$;

б) $\cos\frac{5\pi}{3} + \cos\frac{4\pi}{3} + \sin\frac{3\pi}{2} \cdot \sin\frac{5\pi}{8} \cdot \cos\frac{3\pi}{2}$.

6.8. а) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4}$; в) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$;

б) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$; г) $\operatorname{tg}\frac{9\pi}{4} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$.

О6.9. а) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$;

б) $2\sin\pi + 3\cos\pi + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$;

в) $2\sin\frac{\pi}{3} \cdot \cos\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3}$;

г) $2\operatorname{tg} 0 + 8\cos\frac{3\pi}{2} - 6\sin^2\frac{\pi}{3}$.

6.10. а) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}$; в) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{7} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi}{7}$;

б) $3\operatorname{tg} 2{,}3 \cdot \operatorname{ctg} 2{,}3$; г) $7\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi}{12}$.

6.11. Докажите тождество:

а) $\sin t \cdot \operatorname{ctg} t = \cos t$;

б) $\dfrac{\sin t}{\operatorname{tg} t} = \cos t$;

в) $\cos t \cdot \operatorname{tg} t = \sin t$;

г) $\dfrac{\cos t}{\operatorname{ctg} t} = \sin t$.

○6.12. Упростите выражение:

а) $\sin t \cdot \cos t \cdot \operatorname{tg} t$;

б) $\sin t \cdot \cos t \cdot \operatorname{ctg} t - 1$;

в) $\sin^2 t - \operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t$;

г) $\dfrac{1-\cos^2 t}{1-\sin^2 t}$.

Найдите значение выражения:

○6.13. а) $\cos 2t$, если $t = \dfrac{\pi}{2}$;

б) $\sin \dfrac{t}{2}$, если $t = -\dfrac{\pi}{3}$;

в) $\sin 2t$, если $t = -\dfrac{\pi}{6}$;

г) $\cos \dfrac{t}{2}$, если $t = -\dfrac{\pi}{3}$.

○6.14. а) $\sin^2 t - \cos^2 t$, если $t = \dfrac{\pi}{3}$;

б) $\sin^2 t + \cos^2 t$, если $t = \dfrac{\pi}{4}$;

в) $\sin^2 t - \cos^2 t$, если $t = \dfrac{\pi}{4}$;

г) $\sin^2 t + \cos^2 t$, если $t = \dfrac{\pi}{6}$.

○6.15. Найдите наименьшее и наибольшее значения выражения:

а) $2\sin t$; б) $3 + 4\cos t$; в) $-3\cos t$; г) $3 - 5\sin t$.

Решите уравнение:

6.16. а) $\cos t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\sin t = -\dfrac{1}{2}$;

в) $\cos t = -\dfrac{1}{2}$;

г) $\sin t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

6.17. а) $\sin t = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\sin t = \sqrt{3}$;

в) $\cos t = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $\cos t = -\dfrac{\pi}{3}$.

6.18. Решите уравнение:

а) $\sin t + 1 = 0$; в) $1 - 2\sin t = 0$;

б) $\cos t - 1 = 0$; г) $2\cos t - 1 = 0$.

6.19. Укажите все значения t, при которых не имеет смысла выражение:

а) $\dfrac{\sin t - 1}{\cos t}$; б) $\dfrac{\cos t + 5}{2\sin t - \sqrt{3}}$; в) $\dfrac{\cos t}{3 - 3\sin t}$; г) $\dfrac{\sin t}{10 - 20\cos t}$.

Определите знак числа:

○6.20. а) $\sin\dfrac{4\pi}{7}$; б) $\cos\left(-\dfrac{5\pi}{7}\right)$; в) $\sin\dfrac{9\pi}{8}$; г) $\sin\left(-\dfrac{3\pi}{8}\right)$.

○6.21. а) $\operatorname{tg}\dfrac{6\pi}{7}$; б) $\operatorname{ctg}\dfrac{10\pi}{9}$; в) $\operatorname{tg}\dfrac{8\pi}{11}$; г) $\operatorname{ctg}\dfrac{11\pi}{5}$.

○6.22. а) $\sin(-2)$; б) $\cos 3$; в) $\sin 5$; г) $\cos(-6)$.

○6.23. а) $\sin 10$; б) $\cos(-12)$; в) $\sin(-15)$; г) $\cos 8$.

○6.24. а) $\sin 1 \cdot \cos 2$; в) $\cos 2 \cdot \sin(-3)$;

б) $\sin\dfrac{\pi}{7} \cdot \cos\left(-\dfrac{7\pi}{5}\right)$; г) $\cos\left(-\dfrac{14\pi}{9}\right) \cdot \sin\left(-\dfrac{4\pi}{9}\right)$.

○6.25. а) $\cos\dfrac{5\pi}{9} - \operatorname{tg}\dfrac{25\pi}{18}$; в) $\sin\dfrac{7\pi}{10} - \operatorname{ctg}\dfrac{3\pi}{5}$;

б) $\operatorname{tg} 1 - \cos 2$; г) $\sin 2 - \operatorname{ctg} 5{,}5$.

○6.26. а) $\sin 1 \cdot \cos 2 \cdot \operatorname{tg} 3 \cdot \operatorname{ctg} 4$;

б) $\sin(-5) \cdot \cos(-6) \cdot \operatorname{tg}(-7) \cdot \operatorname{ctg}(-8)$.

○6.27. Вычислите:

а) $\cos 1 + \cos(1 + \pi) + \sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + \cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$;

б) $\sin 2 + \sin(2 + \pi) + \cos^2\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) + \sin^2\dfrac{\pi}{12}$.

Вычислите:

○6.28. а) $\sin^2 (1{,}5 + 2\pi k) + \cos^2 1{,}5 + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$;

б) $\cos^2\left(\frac{\pi}{8} + 4\pi\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{8} - 44\pi\right)$.

○6.29. а) $\operatorname{tg} 2{,}5 \cdot \operatorname{ctg} 2{,}5 + \cos^2 \pi - \sin^2 \frac{\pi}{8} - \cos^2 \frac{\pi}{8}$;

б) $\sin^2 \frac{3\pi}{7} - 2 \operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{ctg} 1 + \cos^2\left(-\frac{3\pi}{7}\right) + \sin^2 \frac{5\pi}{2}$.

Решите уравнение:

○6.30. а) $10 \sin t = \sqrt{75}$;   в) $8 \cos t - \sqrt{32} = 0$;

б) $\sqrt{8} \sin t + 2 = 0$;   г) $8 \cos t = -\sqrt{48}$.

○6.31. а) $\sin^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8} - \sqrt{2} \sin t = 0$;

б) $\sqrt{\frac{4}{3}} \cos t = \cos^2 1 + \sin^2 1$.

●6.32. а) $|\sin t| = 1$;   в) $|\cos t| = 1$;

б) $\sqrt{1 - \sin^2 t} = \frac{1}{2}$;   г) $\sqrt{1 - \cos^2 t} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

○6.33. Имеет ли смысл выражение:

а) $\sqrt{\sin 10{,}2\pi}$;   в) $\sqrt{\sin(-3{,}4\pi)}$;

б) $\sqrt{\cos 1{,}3\pi}$;   г) $\sqrt{\cos(-6{,}9\pi)}$?

●6.34. Сравните числа a и b, если:

а) $a = \sin \frac{7\pi}{10}$, $b = \sin \frac{5\pi}{6}$;   в) $a = \cos \frac{\pi}{8}$, $b = \cos \frac{\pi}{3}$;

б) $a = \cos 2$, $b = \sin 2$;   г) $a = \sin 1$, $b = \cos 1$.

●6.35. Определите знак разности:

а) $\sin \frac{2\pi}{9} - \sin \frac{10\pi}{9}$;   в) $\sin \frac{15\pi}{8} - \cos \frac{\pi}{4}$;

б) $\sin 1 - \sin 1{,}1$;   г) $\cos 1 - \cos 0{,}9$.

Расположите в порядке возрастания числа:

○6.36. а) $\sin\frac{\pi}{7}$, $\sin\frac{\pi}{5}$, $\sin\frac{2\pi}{3}$, $\sin\frac{7\pi}{6}$, $\sin\frac{4\pi}{3}$;

б) $\cos\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{\pi}{3}$, $\cos\frac{5\pi}{6}$, $\cos\frac{5\pi}{4}$, $\cos\frac{7\pi}{4}$.

●6.37. а) sin 2, sin 3, cos 4, cos 5; в) sin 3, sin 4, sin 6, sin 7;
б) cos 3, cos 4, cos 6, cos 7; г) cos 2, cos 3, sin 4, sin 5.

●6.38. а) 1, sin 1, cos 1, tg 1; б) 2, sin 2, cos 2, ctg 2.

Решите неравенство:

○6.39. а) $\sin t > 0$; в) $\sin t < 0$;

б) $\sin t < \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\sin t > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

○6.40. а) $\cos t > 0$; в) $\cos t < 0$;

б) $\cos t < \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\cos t > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

○6.41. а) $\sin t > -\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\sin t < -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\cos t > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\cos t < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

§ 7. Тригонометрические функции числового аргумента

Упростите выражение:

7.1. а) $1 - \sin^2 t$; в) $1 - \cos^2 t$;

б) $\cos^2 t - 1$; г) $\sin^2 t - 1$.

7.2. а) $(1 - \sin t)(1 + \sin t)$; в) $(1 - \cos t)(1 + \cos t)$;

б) $\cos^2 t + 1 - \sin^2 t$; г) $\sin^2 t + 2\cos^2 t - 1$.

Упростите выражение:

7.3. а) $\frac{1}{\cos^2 t} - 1$; в) $1 - \frac{1}{\sin^2 t}$;

б) $\frac{1 - \sin^2 t}{\cos^2 t}$; г) $\frac{1 - \cos^2 t}{1 - \sin^2 t}$.

7.4. а) $\frac{(\sin t + \cos t)^2}{1 + 2\sin t \cos t}$; б) $\frac{1 - 2\sin t \cos t}{(\cos t - \sin t)^2}$.

7.5. Докажите тождество:

а) $\frac{\cos^2 t}{1 - \sin t} - \sin t = 1$; б) $\frac{\sin^2 t}{1 + \cos t} + \cos t = 1$.

○7.6. Докажите, что при всех допустимых значениях t выражение принимает одно и то же значение:

а) $\sin^4 t - \cos^4 t + 2\cos^2 t$;

б) $\frac{2 - \sin^2 t - \cos^2 t}{3\sin^2 t + 3\cos^2 t}$;

в) $\sin^4 t + \cos^4 t + 2\sin^2 t \cos^2 t$;

г) $\frac{\sin^4 t - \cos^4 t}{\sin^2 t - \cos^2 t}$.

По заданному значению функции найдите значения остальных тригонометрических функций:

○7.7. а) $\sin t = \frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2} < t < \pi$; в) $\sin t = -0{,}6$, $-\frac{\pi}{2} < t < 0$;

б) $\sin t = \frac{5}{13}$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$; г) $\sin t = -0{,}28$, $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$.

○7.8. а) $\cos t = 0{,}8$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$; в) $\cos t = 0{,}6$, $\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$;

б) $\cos t = -\frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{2} < t < \pi$; г) $\cos t = -\frac{24}{25}$, $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$.

○7.9. а) $\operatorname{tg} t = \frac{3}{4}$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$; в) $\operatorname{tg} t = -\frac{3}{4}$, $\frac{\pi}{2} < t < \pi$;

б) $\operatorname{tg} t = 2{,}4$, $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$; г) $\operatorname{tg} t = -\frac{5}{12}$, $\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$.

О7.10. По заданному значению функции найдите значения остальных тригонометрических функций:

а) $\operatorname{ctg} t = \frac{12}{5}$, $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$;

б) $\operatorname{ctg} t = \frac{7}{24}$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$;

в) $\operatorname{ctg} t = -\frac{5}{12}$, $\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$;

г) $\operatorname{ctg} t = -\frac{8}{15}$, $\frac{\pi}{2} < t < \pi$.

О7.11. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $s = f(t)$, если:

а) $f(t) = 1 - (\cos^2 t - \sin^2 t)$;

б) $f(t) = 1 - \sin t \cdot \cos t \cdot \operatorname{tg} t$;

в) $f(t) = \sin t + 3\sin^2 t + 3\cos^2 t$.

г) $f(t) = \cos^2 t \cdot \operatorname{tg}^2 t + 5\cos^2 t - 1$;

Упростите выражение:

О7.12. а) $\operatorname{ctg} t - \frac{\cos t - 1}{\sin t}$;

б) $\operatorname{ctg}^2 t - (\sin^{-2} t - 1)$;

в) $\cos^2 t - (\operatorname{ctg}^2 t + 1) \cdot \sin^2 t$;

г) $\frac{\sin^2 t - 1}{\cos^2 t - 1} + \operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t$.

О7.13. а) $\frac{\sin t}{1 + \cos t} + \frac{\sin t}{1 - \cos t}$;

б) $\operatorname{ctg}^2 t \cdot (\cos^2 t - 1) + 1$;

в) $\frac{\cos t}{1 + \sin t} + \frac{\cos t}{1 - \sin t}$;

г) $\frac{\operatorname{tg} t + 1}{1 + \operatorname{ctg} t}$.

О7.14. а) $\frac{1 - \sin^2 t}{1 - \cos^2 t} + \operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t$;

б) $\frac{\cos^2 t - \operatorname{ctg}^2 t}{\sin^2 t - \operatorname{tg}^2 t}$.

Докажите тождество:

О7.15. а) $1 + \sin t = \frac{\cos t + \operatorname{ctg} t}{\operatorname{ctg} t}$;

б) $\frac{\sin t + \operatorname{tg} t}{\operatorname{tg} t} = 1 + \cos t$;

в) $\frac{1 - \sin t}{\cos t} = \frac{\cos t}{1 + \sin t}$;

г) $\frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{1 + \cos t}{\sin t}$.

О7.16. а) $\frac{(\sin t + \cos t)^2 - 1}{\operatorname{ctg} t - \sin t \cos t} = 2\operatorname{tg}^2 t$;

б) $\sin^3 t\,(1 + \operatorname{ctg} t) + \cos^3 t\,(1 + \operatorname{tg} t) = \sin t + \cos t$.

○7.17. а) Дано: $\sin(4\pi + t) = \frac{3}{5}$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Вычислите $\operatorname{tg}(\pi - t)$.

б) Дано: $\cos(2\pi + t) = \frac{12}{13}$, $\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$. Вычислите $\operatorname{ctg}(\pi - t)$.

○7.18. а) Дано: $\cos t = -\frac{5}{13}$, $8{,}5\pi < t < 9\pi$. Вычислите $\sin(-t)$.

б) Дано: $\sin t = \frac{4}{5}$, $\frac{9\pi}{2} < t < 5\pi$. Вычислите $\cos(-t) + \sin(-t)$.

●7.19. Вычислите $\sin t + \cos t$, если $\operatorname{tg} t - \frac{1}{\operatorname{tg} t} = -\frac{7}{12}$ и $0 < t < \frac{\pi}{2}$.

●7.20. Постройте график функции:

а) $y = \cos^2 x + \sin^2 x$; в) $y = \sin^2 \sqrt{x} + \cos^2 \sqrt{x}$;

б) $y = \cos^2 \frac{1}{x} + \sin^2 \frac{1}{x}$; г) $y = \sin^2 \frac{1}{x^2 - 4} + \cos^2 \frac{1}{x^2 - 4}$.

§ 8. Тригонометрические функции углового аргумента

Переведите из градусной меры в радианную:

8.1. а) 120°; б) 220°; в) 300°; г) 765°.

8.2. а) 210°; б) 150°; в) 330°; г) 675°.

Переведите из радианной меры в градусную:

8.3. а) $\frac{3\pi}{4}$; б) $\frac{11\pi}{3}$; в) $\frac{6\pi}{5}$; г) $\frac{46\pi}{9}$.

8.4. а) $\frac{5\pi}{8}$; б) $\frac{7\pi}{12}$; в) $\frac{11\pi}{12}$; г) $\frac{47\pi}{9}$.

Вычислите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ для заданного значения угла α:

8.5. а) 90°; б) 180°; в) 270°; г) 360°.

8.6. а) 30°; б) 150°; в) 210°; г) 240°.

Расположите в порядке возрастания числа:

○8.7. sin 40°; sin 80°; sin 120°; sin 160°.

○8.8. cos 40°; cos 80°; cos 120°; cos 160°.

○8.9. sin 20°; sin 110°; sin 210°; sin 400°.

Найдите сторону x прямоугольного треугольника, изображенного на данном рисунке:

8.10. а) рис. 3; б) рис. 4; в) рис. 5; г) рис. 6.

8.11. а) рис. 7; б) рис. 8; в) рис. 9; г) рис. 10.

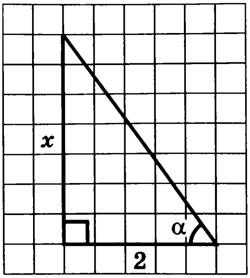

Рис. 3

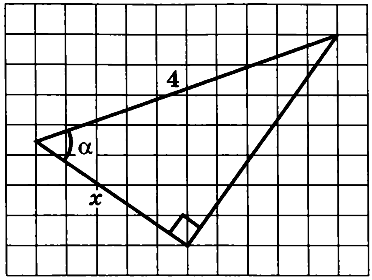

Рис. 4

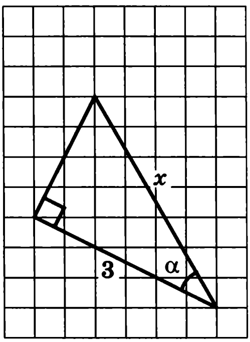

Рис. 5

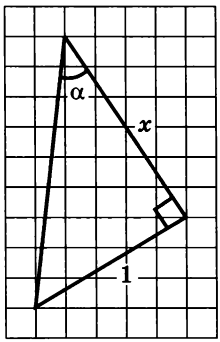

Рис. 6

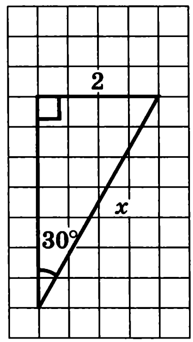

Рис. 7

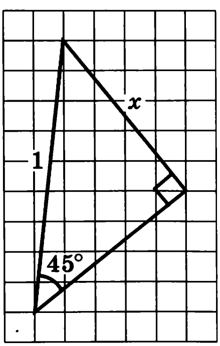

Рис. 8

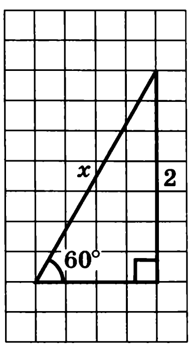

Рис. 9

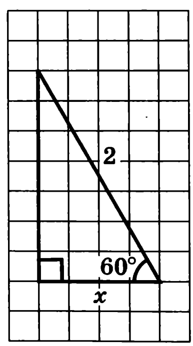

Рис. 10

○8.12. В прямоугольном треугольнике известны гипотенуза c и острый угол $\alpha°$. Найдите катеты, площадь треугольника и радиус описанной окружности, если:

а) $c = 12$, $\alpha = 60°$; в) $c = 4$, $\alpha = 30°$;

б) $c = 6$, $\alpha = 45°$; г) $c = 60$, $\alpha = 60°$.

○8.13. Хорда AB образует с диаметром AC окружности угол $\alpha°$. Найдите длину хорды AB, если радиус окружности равен R.

○8.14. Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

○8.15. В $\triangle ABC$ известно, что $AB = 4\sqrt{2}$ см, $\angle A = 45°$, $\angle C = 30°$. Найдите BC, AC и площадь $\triangle ABC$.

○8.16. Высота треугольника составляет 5 см, а углы, прилегающие к основанию, равны 60° и 45°. Найдите площадь треугольника.

§ 9. Формулы приведения

Упростите выражение:

9.1. а) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$; в) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + t\right)$;

б) $\cos(2\pi - t)$; г) $\sin(\pi + t)$.

9.2. а) $\sin(\pi - t)$; в) $\cos(2\pi + t)$;

б) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)$; г) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - t\right)$.

9.3. а) $\cos(90° - \alpha)$; в) $\sin(270° - \alpha)$;

б) $\sin(360° - \alpha)$; г) $\cos(180° - \alpha)$.

9.4. а) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$; в) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + t\right)$;

б) $\operatorname{ctg}(180° - \alpha)$; г) $\operatorname{ctg}(360° - \alpha)$.

9.5. Вычислите с помощью формул приведения:

а) $\sin 240°$; в) $\cos 330°$;

б) $\operatorname{tg} 300°$; г) $\operatorname{ctg} 315°$.

Вычислите с помощью формул приведения:

9.6. а) $\cos\frac{5\pi}{3}$; в) $\sin\frac{7\pi}{6}$;

б) $\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$; г) $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$.

○9.7. а) $\cos 630° - \sin 1470° - \operatorname{ctg} 1125°$.

б) $\sin(-7\pi) + 2\cos\frac{31\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}$;

в) $\operatorname{tg} 1800° - \sin 495° + \cos 945°$;

г) $\cos(-9\pi) + 2\sin\left(-\frac{49\pi}{6}\right) - \operatorname{ctg}\left(-\frac{21\pi}{4}\right)$.

Упростите выражение:

○9.8. а) $\sin(90° - \alpha) + \cos(180° + \alpha) + \operatorname{tg}(270° + \alpha) + \operatorname{ctg}(360° + \alpha)$;

б) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) - \cos(\pi - t) + \operatorname{tg}(\pi - t) + \operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2} - t\right)$.

○9.9. а) $\frac{\cos(180° + \alpha)\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)\sin(90° + \alpha)}$; в) $\frac{\sin(-\alpha)\operatorname{ctg}(-\alpha)}{\cos(360° - \alpha)\operatorname{tg}(180° + \alpha)}$;

б) $\frac{\sin(\pi - t)\cos(2\pi - t)}{\operatorname{tg}(\pi - t)\cos(\pi - t)}$; г) $\frac{\sin(\pi + t)\sin(2\pi + t)}{\operatorname{tg}(\pi + t)\cos\left(\frac{3\pi}{2} + t\right)}$.

○9.10. а) $\frac{\cos(\pi - t) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{\sin(2\pi - t) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - t\right)}$;

б) $\frac{\sin^2(\pi - t) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{\sin(\pi - t)} \cdot \operatorname{tg}(\pi - t)$.

○9.11. Докажите тождество:

а) $\frac{\operatorname{tg}(\pi - t)}{\cos(\pi + t)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + t\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + t\right)} = \operatorname{tg}^2 t$;

б) $\frac{\sin(\pi - t)}{\operatorname{tg}(\pi + t)} \cdot \frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + t\right)} \cdot \frac{\cos(2\pi - t)}{\sin(-t)} = \sin t$.

Решите уравнение:

○9.12. а) $2\cos(2\pi + t) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = 3;$

б) $\sin(\pi + t) + 2\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = 3;$

в) $2\sin(\pi + t) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = -\frac{1}{2};$

г) $3\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) - \cos(2\pi + t) = 1.$

○9.13. а) $5\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) - 8\cos(2\pi - t) = 1;$

б) $\sin(2\pi + t) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \sin(\pi - t) = 1.$

○9.14. а) $\sin^2(\pi + t) + \cos^2(2\pi - t) = 0;$

б) $\sin^2(\pi + t) + \cos^2(2\pi - t) = 1.$

§ 10. Функция $y = \sin x$, ее свойства и график

Для функции $y = f(x)$, где $f(x) = \sin x$, найдите:

10.1. а) $f(\pi)$; б) $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; в) $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$; г) $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

10.2. а) $f(-x)$; б) $f(2x)$; в) $f(x+1)$; г) $f(x) - 5$.

○10.3. Найдите значение функции:

а) $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$ при $x = \frac{4\pi}{3};$

б) $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ при $x = -\frac{\pi}{2};$

в) $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$ при $x = \frac{7\pi}{6};$

г) $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ при $x = -\frac{15\pi}{4}.$

10.4. Не выполняя построения, ответьте, принадлежит ли графику функции $y = \sin x$ точка:

а) $\left(-\frac{\pi}{2};\ -1\right)$;

б) $\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{1}{2}\right)$;

в) $(\pi;\ 1)$;

г) $\left(\frac{3\pi}{2};\ -1\right)$.

○10.5. Не выполняя построения, ответьте, принадлежит ли графику функции $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2$ точка:

а) $\left(0; \frac{3}{2}\right)$;

б) $\left(\frac{\pi}{6}; -\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\right)$;

в) $\left(\frac{2\pi}{3}; \frac{3}{2}\right)$;

г) $(4\pi;\ 2{,}5)$.

○10.6. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = \sin x$:

а) на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right]$;

б) на луче $\left[\frac{\pi}{4}, +\infty\right)$;

в) на интервале $\left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$;

г) на полуинтервале $\left(-\pi, \frac{\pi}{3}\right]$.

Постройте график функции:

○10.7. а) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;

б) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;

в) $y = \sin(x - \pi)$;

г) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

○10.8. а) $y = \sin x - 2$;

б) $y = \sin x + 1$;

в) $y = \sin x + 2$;

г) $y = \sin x - 3$.

○10.9. а) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$;

б) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$.

○10.10. а) $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$;

б) $y = -\sin x + 3$.

Решите графически уравнение:

○10.11. а) $\sin x = x + \pi$; в) $\sin x + x = 0$;

б) $\sin x = 2x$; г) $\sin x = 2x - 2\pi$.

●10.12. а) $\sin x = \frac{2}{\pi}x$; б) $\sin x = -\frac{4}{\pi}x + 3$.

●10.13. а) $\sin x - \sqrt{x - \pi} = 0$; б) $-\sin x = \sqrt{x}$.

○10.14. Докажите, что функция $y = f(x)$ является нечетной, если:

а) $f(x) = x + \sin x$; в) $f(x) = \frac{x^2 \cdot \sin x}{x^2 - 9}$;

б) $f(x) = x^3 \cdot \sin x^2$; г) $f(x) = x^3 - \sin x$.

●10.15. Дано: $f(x) = 2x^2 - x + 1$. Докажите, что

$f(\sin x) = 3 - 2\cos^2 x - \sin x$.

○10.16. Постройте график функции $y = f(x)$, где:

а) $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ если } x < 0, \\ \sin x, \text{ если } x \geqslant 0; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} \sin x, \text{ если } x < 0, \\ x^2, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$

○10.17. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} \sin x, \text{ если } -\pi \leqslant x \leqslant 0, \\ \sqrt{x}, \text{ если } x > 0. \end{cases}$

а) Вычислите: $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(\pi^2)$;

б) постройте график функции $y = f(x)$;

в) прочитайте график функции $y = f(x)$.

○10.18. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, \text{ если } x < 0, \\ \sin x, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

а) Вычислите: $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$;

б) постройте график функции $y = f(x)$;

в) прочитайте график функции $y = f(x)$.

§ 11. Функция $y = \cos x$, ее свойства и график

Для функции $y = f(x)$, где $f(x) = \cos x$, найдите:

11.1. а) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$; б) $f(-\pi)$; в) $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$; г) $f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

11.2. а) $f(-x)$; б) $f(3x)$; в) $f(x+2)$; г) $f(x) - 6$.

Найдите значение функции:

11.3. $y = 2\sin x + \cos x$, если:

а) $x = -\frac{\pi}{2}$; б) $x = \frac{\pi}{6}$.

О11.4. $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$, если:

а) $x = -\frac{\pi}{2}$; б) $x = \frac{\pi}{4}$.

Постройте график функции:

О11.5. а) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; в) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;

б) $y = \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$; г) $y = \cos\left(x + \frac{5\pi}{6}\right)$.

О11.6. а) $y = \cos x + 1$; в) $y = \cos x - \frac{1}{2}$;

б) $y = \cos x - 2$; г) $y = \cos x + 1{,}5$.

О11.7. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = \cos x$:

а) на отрезке $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right]$;

б) на интервале $\left(-\pi; \frac{\pi}{4}\right)$;

в) на луче $\left[-\frac{\pi}{3}; +\infty\right)$.

г) на полуинтервале $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

○11.8. Постройте и прочитайте график функции $y = f(x)$, где:

а) $f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{ если } x < 0, \\ \cos x, \text{ если } x \geqslant 0; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} \cos x, \text{ если } x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ \sin x, \text{ если } x > \frac{\pi}{2}; \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x}, \text{ если } x < 0, \\ -\cos x, \text{ если } x \geqslant 0; \end{cases}$

г) $f(x) = \begin{cases} -\cos x, \text{ если } x < 0, \\ 2x^2 - 1, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$

Решите графически уравнение:

○11.9. а) $\cos x = x + \frac{\pi}{2}$; в) $\cos x = 2x + 1$;

б) $-\cos x = 3x - 1$; г) $\cos x = -x + \frac{\pi}{2}$.

●11.10. а) $\cos x = \sqrt{x} + 1$; в) $\cos x = -(x - \pi)^2 - 1$;

б) $\cos x = \sqrt{x - \frac{\pi}{2}}$; г) $\cos x = |x| + 1$.

○11.11. Докажите, что функция $y = f(x)$ является четной, если:

а) $f(x) = x^2 \cdot \cos x$; в) $f(x) = \frac{\cos 5x + 1}{|x|}$;

б) $f(x) = \frac{\cos x^3}{4 - x^2}$; г) $f(x) = (4 + \cos x)(\sin^6 x - 1)$.

○11.12. Докажите, что функция $y = f(x)$ является нечетной, если:

а) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$; в) $f(x) = \frac{\cos x^3}{x(25 - x^2)}$;

б) $f(x) = x^5 \cdot \cos 3x$; г) $f(x) = x^{11} \cdot \cos x + \sin x$.

●**11.13.** а) Дано: $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$. Докажите, что

$$-f(\cos x) = 2\sin^2 x + 3\cos x.$$

б) Дано: $f(x) = 5x^2 + x + 4$. Докажите, что

$$f(\cos x) = 9 + \cos x - 5\sin^2 x.$$

§ 12. Периодичность функций $y = \sin x$, $y = \cos x$

12.1. На рисунке 11 изображена часть графика периодической функции $y = f(x)$ на отрезке $[-1; 1]$, длина которого равна периоду функции. Постройте график функции:

а) на отрезке $[1; 3]$;

б) на отрезке $[-3; -1]$;

в) на отрезке $[3; 7]$;

г) на всей числовой прямой.

12.2. На рисунке 12 изображена часть графика периодической функции $y = f(x)$ на отрезке $[0; 3]$, длина которого равна периоду функции. Постройте график функции:

а) на отрезке $[3; 6]$;

б) на отрезке $[-3; 0]$;

в) на отрезке $[6; 12]$;

г) на всей числовой прямой.

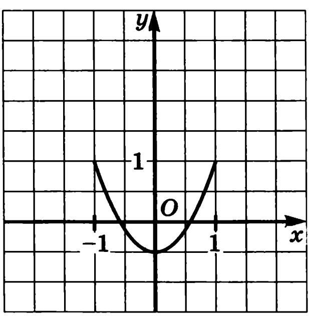

Рис. 11

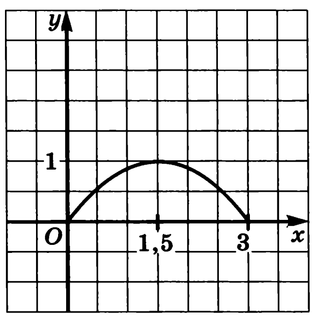

Рис. 12

○**12.3.** Постройте график периодической функции $y = f(x)$ с периодом $T = 4$, если известно, что $f(x) = \frac{x^2}{2}$ на отрезке $[-2; 2]$.

О12.4. Постройте график периодической функции $y = f(x)$ с периодом $T = 2$, если известно, что $f(x) = x^4$ на отрезке $[-1; 1]$.

12.5. Является ли число 32π периодом функции $y = \sin x$, $y = \cos x$? А основным периодом?

Вычислите, преобразовав заданное выражение ($\sin t$ или $\cos t$) к виду $\sin t_0$ или $\cos t_0$ так, чтобы выполнялось соотношение $0 < t_0 < 2\pi$ или $0 < t_0 < 360°$.

О12.6. а) $\sin 50{,}5\pi$; в) $\sin 25{,}25\pi$;

б) $\sin 51{,}75\pi$; г) $\sin 29{,}5\pi$.

О12.7. а) $\sin 390°$; в) $\sin 540°$;

б) $\cos 750°$; г) $\cos 930°$.

О12.8. Докажите тождество:

а) $\sin^2 (x - 8\pi) = 1 - \cos^2 (16\pi - x)$;

б) $\cos^2 (4\pi + x) = 1 - \sin^2 (22\pi - x)$.

О12.9. Решите уравнение:

а) $\sin (x + 2\pi) + \sin (x - 4\pi) = 1$;

б) $3 \cos (2\pi + x) + \cos (x - 2\pi) + 2 = 0$;

в) $\sin (x + 4\pi) + \sin (x - 6\pi) = \sqrt{3}$;

г) $\cos (x + 2\pi) + \cos (x - 8\pi) = \sqrt{2}$.

§ 13. Преобразование графиков тригонометрических функций

Постройте график функции:

13.1. а) $y = 2 \sin x$; в) $y = -\sin x$;

б) $y = -\cos x$; г) $y = 3 \cos x$.

13.2. а) $y = -2 \sin x$; в) $y = 1{,}5 \sin x$;

б) $y = -3 \cos x$; г) $y = -1{,}5 \cos x$.

13.3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2\cos x$:

а) на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

б) на интервале $\left(0; \frac{3\pi}{2}\right)$;

в) на полуинтервале $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}\right)$;

г) на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right]$.

13.4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = -3\sin x$:

а) на луче $[0; +\infty)$;

б) на открытом луче $\left(-\infty; \frac{\pi}{2}\right)$;

в) на луче $\left[\frac{\pi}{4}; +\infty\right)$;

г) на открытом луче $(-\infty; 0)$.

○13.5. Известно, что $f(x) = 3\sin x$. Найдите:

а) $f(-x)$; в) $2f(x)+1$;

б) $2f(x)$; г) $f(-x)+f(x)$.

○13.6. Известно, что $f(x) = -\frac{1}{2}\cos x$. Найдите:

а) $f(-x)$; б) $2f(x)$; в) $f(x+2\pi)$; г) $f(-x)-f(x)$.

Постройте график функции:

○13.7. а) $y = 2\sin x - 1$; в) $y = -\frac{3}{2}\sin x + 3$;

б) $y = -\frac{1}{2}\cos x + 2$; г) $y = 3\cos x - 2$.

○13.8. а) $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; в) $y = -\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$;

б) $y = -3\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; г) $y = 1{,}5\cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$.

●13.9. Составьте возможное аналитическое задание функции по ее графику, изображенному:

а) на рис. 13; б) на рис. 14.

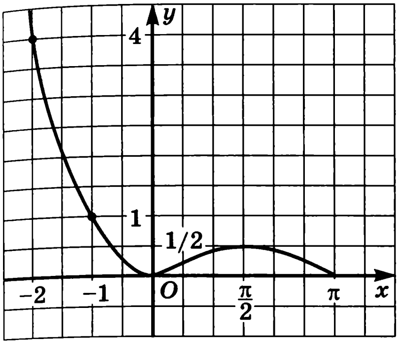

Рис. 13

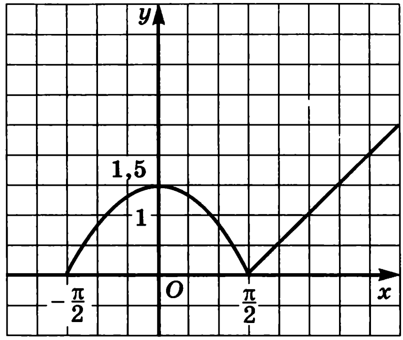

Рис. 14

○13.10. Постройте и прочитайте график функции $y = f(x)$:

а) $f(x) = \begin{cases} 3 \sin x, & \text{если } x < \frac{\pi}{2}, \\ 2 \cos x + 3, & \text{если } x \geqslant \frac{\pi}{2}; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} -2 \cos x, & \text{если } x < 0, \\ \frac{1}{2}x^4, & \text{если } x \geqslant 0. \end{cases}$

○13.11. Постройте график функции:

а) $y = \sin \frac{x}{3}$; в) $y = \cos \frac{x}{2}$;

б) $y = \cos 2x$; г) $y = \sin 3x$.

○13.12. а) $y = 3 \sin \frac{x}{2}$; в) $y = -3 \cos 2x$;

б) $y = 2{,}5 \cos 2x$; г) $y = 2 \sin \frac{x}{3}$.

○13.13. а) $y = 3 \sin (-x)$; в) $y = 2 \sin (-2x)$;

б) $y = -2 \cos (-3x)$; г) $y = -3 \cos (-x)$.

○13.14. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = \sin 2x$:

а) на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right]$;

б) на интервале $\left(-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right)$;

в) на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right]$;

г) на полуинтервале $(0;\ \pi]$.

○13.15. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = \cos\frac{x}{3}$:

а) на луче $[0;\ +\infty)$;

б) на открытом луче $(-\infty;\ \pi)$;

в) на луче $\left(-\infty;\ \frac{\pi}{2}\right]$;

г) на открытом луче $\left(\frac{\pi}{3};\ +\infty\right)$.

○13.16. Известно, что $f(x) = \cos\frac{x}{3}$. Найдите:

а) $f(-x)$; в) $f(-3x)$;

б) $3f(x)$; г) $f(-x) - f(x)$.

○13.17. Известно, что $f(x) = \sin 2x$. Найдите:

а) $f(-x)$; в) $f(-3x)$;

б) $2f(x)$; г) $f(-x) + f(x)$.

○13.18. Постройте график функции:

а) $y = \sin 2x - 1$; в) $y = \cos 2x + 3$;

б) $y = \cos\frac{x}{2} + 1$; г) $y = \sin\frac{x}{3} - 2$.

○13.19. Постройте и прочитайте график функции $y = f(x)$:

а) $f(x) = \begin{cases} \cos 2x, & \text{если } x \leqslant \pi, \\ -\frac{1}{2}, & \text{если } x > \pi; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} -\sin 3x, & \text{если } x < 0, \\ \sqrt{x}, & \text{если } x \geqslant 0. \end{cases}$

●**13.20.** Составьте возможное аналитическое задание функции (предполагается, что $D(f) = \boldsymbol{R}$) по ее графику, изображенному:

а) на рис. 15;
б) на рис. 16;
в) на рис. 17;
г) на рис. 18.

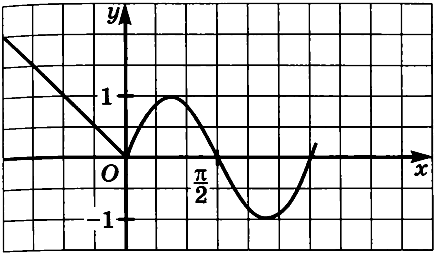

Рис. 15

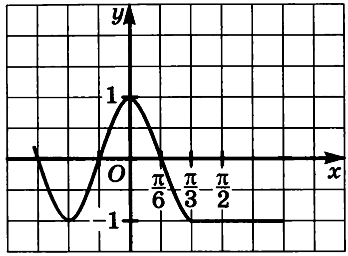

Рис. 16

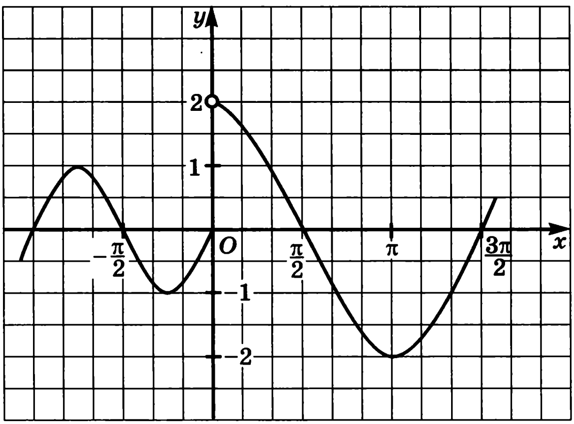

Рис. 17

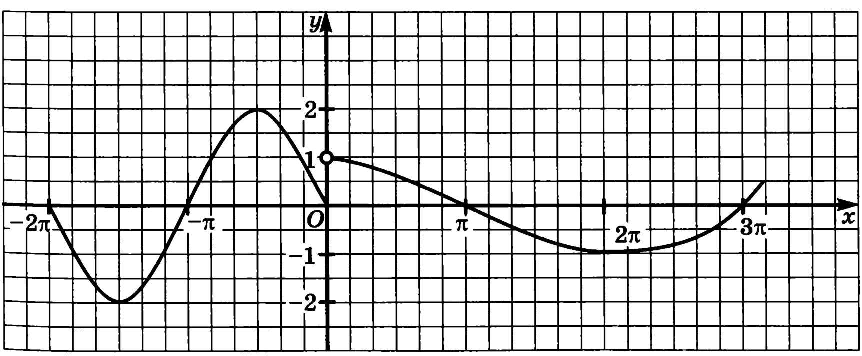

Рис. 18

§ 14. Функции $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, их свойства и графики

14.1. Найдите значение функции $y = \operatorname{tg} x$ при заданном значении аргумента x:

а) $x = \frac{\pi}{4}$; б) $x = \frac{2\pi}{3}$; в) $x = \frac{3\pi}{4}$; г) $x = \pi$.

14.2. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = \operatorname{tg} x$ на заданном промежутке:

а) на интервале $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$;

б) на полуинтервале $\left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$;

в) на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{6}\right]$;

г) на полуинтервале $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

○14.3. Решите графически уравнение:

а) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$; б) $\operatorname{tg} x = 1$; в) $\operatorname{tg} x = -1$; г) $\operatorname{tg} x = 0$.

14.4. Найдите значение функции $y = \operatorname{ctg} x$ при заданном значении аргумента x:

а) $x = \frac{\pi}{4}$; б) $x = \frac{\pi}{3}$; в) $x = 2\pi$; г) $x = \frac{\pi}{2}$.

14.5. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = \operatorname{ctg} x$ на заданном промежутке:

а) на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$;

б) на полуинтервале $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right)$;

в) на интервале $(-\pi; 0)$;

г) на отрезке $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

○14.6. Решите графически уравнение:

а) $\operatorname{ctg} x = 1$;

б) $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

в) $\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

г) $\operatorname{ctg} x = 0$.

○14.7. Исследуйте функцию $y = f(x)$ на четность, если:

а) $f(x) = \operatorname{tg} x - \cos x$;

б) $f(x) = \operatorname{tg} x + x$;

в) $f(x) = \operatorname{ctg}^2 x - x^4$;

г) $f(x) = x^3 - \operatorname{ctg} x$.

○14.8. Известно, что $\operatorname{tg}(9\pi - x) = -\frac{3}{4}$. Найдите $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

○14.9. Известно, что $\operatorname{ctg}(7\pi - x) = \frac{5}{7}$. Найдите $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

○14.10. Определите знак разности:

а) $\operatorname{tg} 200° - \operatorname{tg} 201°$;

б) $\operatorname{tg} 1 - \operatorname{tg} 1{,}01$;

в) $\operatorname{tg} 2{,}2 - \operatorname{tg} 2{,}1$;

г) $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{5} - \operatorname{tg} \frac{6\pi}{5}$.

○14.11. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \operatorname{tg} x$. Докажите, что $f(2x + 2\pi) + f(7\pi - 2x) = 0$.

○14.12. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = x^2 + 1$. Докажите, что $f(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Постройте график функции:

●14.13. а) $y = 02 \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$;

б) $y = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x + \sqrt{x}$.

●14.14. а) $y = \sin^2(\operatorname{tg} x) + \cos^2(\operatorname{tg} x)$;

б) $y = 2\cos^2(\operatorname{ctg} x) + 2\sin^2(\operatorname{ctg} x)$.

●14.15. а) $y = \operatorname{tg}(\cos x) \cdot \operatorname{ctg}(\cos x)$;

б) $y = -2 \operatorname{tg}(\sin x) \cdot \operatorname{ctg}(\sin x)$.

ГЛАВА 3 Тригонометрические уравнения

§ 15. Арккосинус. Решение уравнения $\cos t = a$

Вычислите:

15.1. а) $\arccos 0$; б) $\arccos 1$; в) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\arccos \frac{1}{2}$.

15.2. а) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; б) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; в) $\arccos(-1)$; г) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

○15.3. а) $\arccos(-1) + \arccos 0$; б) $\arccos \frac{1}{2} - \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \arccos \frac{1}{2}$.

○15.4. а) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$; б) $\operatorname{tg}\left(\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; в) $\operatorname{ctg}(\arccos 0)$; г) $\sin\left(\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Решите уравнение:

15.5. а) $\cos t = \frac{1}{2}$; б) $\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\cos t = 1$; г) $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

15.6. а) $\cos t = -1$; б) $\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\cos t = -\frac{1}{2}$; г) $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

15.7. Решите уравнение:

а) $\cos t = \frac{1}{3}$; в) $\cos t = -\frac{3}{7}$;

б) $\cos t = -1{,}1$; г) $\cos t = 2{,}04$.

○15.8. Вычислите:

а) $\cos\left(2\arccos\frac{1}{2} - 3\arccos 0 - \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$;

б) $\frac{1}{3}\left(\arccos\frac{1}{3} + \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$.

○15.9. Найдите область допустимых значений выражения:

а) $\arccos x$; в) $\arccos(x - 1)$;

б) $\arccos 2x$; г) $\arccos(3 - 2x)$.

○15.10. Имеет ли смысл выражение:

а) $\arccos\sqrt{5}$; в) $\arccos\frac{\pi}{5}$;

б) $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$; г) $\arccos\left(-\sqrt{3}\right)$?

○15.11. Докажите тождество

$$\operatorname{tg}(\arccos 0{,}1 + \arccos(-0{,}1) + x) = \operatorname{tg} x.$$

Решите уравнение:

○15.12. а) $\frac{8\cos t - 3}{3\cos t + 2} = 1$;

б) $\frac{3\cos t + 1}{2} + \frac{5\cos t - 1}{3} = 1{,}75$.

○15.13. а) $6\cos^2 t + 5\cos t + 1 = 0$;

б) $3 + 9\cos t = 5\sin^2 t$.

○15.14. Найдите корни заданного уравнения на заданном промежутке:

а) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in [0, 2\pi]$;

б) $\cos x = -\frac{1}{2}$, $x \in [2\pi, 4\pi]$;

в) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in [-\pi, 3\pi]$;

г) $\cos x = -1$, $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

○15.15. Найдите корни заданного уравнения на заданном промежутке:

а) $\cos x = \frac{1}{2}, \quad x \in (1, 6)$;

б) $\cos x = -\frac{1}{2}, \quad x \in (2, 10)$;

в) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{4}, 12\right)$;

г) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x \in \left(-4, \frac{5\pi}{4}\right)$.

●15.16. Постройте график функции:

а) $y = \arccos x + \arccos(-x)$;

б) $y = \cos(\arccos x)$.

Решите неравенство:

○15.17. а) $\cos t > \frac{1}{2}$;

б) $\cos t \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\cos t \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

г) $\cos t < \frac{1}{2}$.

●15.18. а) $\cos t < \frac{2}{3}$;

б) $\cos t > -\frac{1}{7}$;

в) $\cos t > \frac{2}{3}$;

г) $\cos t < -\frac{1}{7}$.

●15.19. а) $3\cos^2 t - 4\cos t \geqslant 4$;

б) $6\cos^2 t + 1 > 5\cos t$;

в) $3\cos^2 t - 4\cos t < 4$;

г) $6\cos^2 t + 1 \leqslant 5\cos t$.

●15.20. а) $4\cos^2 t < 1$;

б) $3\cos^2 t < \cos t$;

в) $9\cos^2 t > 1$;

г) $3\cos^2 t > \cos t$.

Вычислите:

●15.21. а) $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$;

б) $\sin(\arccos(-0{,}8))$.

●15.22. а) $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)\right)$;

б) $\operatorname{ctg}\left(\arccos\frac{4}{5}\right)$.

§ 16. Арксинус. Решение уравнения $\sin t = a$

Вычислите:

16.1. а) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\arcsin 1$; г) $\arcsin 0$.

16.2. а) $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; в) $\arcsin (-1)$;

б) $\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right)$; г) $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

○16.3. а) $\arcsin 0 + \arccos 0$;

б) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos \frac{1}{2}$;

г) $\arcsin (-1) + \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$.

○16.4. а) $\arccos \left(-\frac{1}{2}\right) + \arcsin \left(-\frac{1}{2}\right)$;

б) $\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \arcsin (-1)$;

в) $\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

г) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} - \arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

16.5. Решите уравнение:

а) $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sin t = 1$;

б) $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\sin t = \frac{1}{2}$.

Решите уравнение:

16.6. а) $\sin t = -1$; в) $\sin t = -\frac{1}{2}$;

б) $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

16.7. а) $\sin t = \frac{1}{4}$; в) $\sin t = -\frac{1}{7}$;

б) $\sin t = 1{,}02$; г) $\sin t = \frac{\pi}{3}$.

○16.8. Докажите тождество:

а) $\sin(\arccos x + \arccos(-x)) = 0$;

б) $\cos(\arcsin x + \arcsin(-x)) = 1$.

○16.9. Найдите корни уравнения на заданном промежутке:

а) $\sin x = \frac{1}{2}$, $x \in [0; 2\pi]$;

б) $\cos x = -\frac{1}{2}$, $x \in [-\pi; \pi]$;

в) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in [-\pi; 2\pi]$;

г) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in [-2\pi; \pi]$.

16.10. Найдите корни заданного уравнения на заданном промежутке:

а) $\sin x = \frac{1}{2}$, $x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{11\pi}{4}\right)$;

б) $\sin x = -\frac{1}{2}$, $x \in \left(-\frac{5\pi}{6}; 6\right)$;

в) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in (-4; 3)$;

г) $\sin x = \frac{1}{2}$, $x \in (-3; 6)$.

○16.11. Найдите область допустимых значений выражения:

а) $\arcsin x$;

б) $\arcsin (5 - 2x)$;

в) $\arcsin \frac{x}{2}$;

г) $\arcsin (x^2 - 3)$.

○16.12. Имеет ли смысл выражение:

а) $\arcsin \left(-\frac{2}{3}\right)$;

б) $\arcsin 1{,}5$;

в) $\arcsin \left(3-\sqrt{20}\right)$;

г) $\arcsin \left(4-\sqrt{20}\right)$?

Решите уравнение:

○16.13. а) $(2 \cos x + 1)(2 \sin x - \sqrt{3}) = 0$;

б) $2 \cos x - 3 \sin x \cos x = 0$;

в) $4 \sin^2 x - 3 \sin x = 0$;

г) $2 \sin^2 x - 1 = 0$.

○16.14. а) $6 \sin^2 x + \sin x = 2$;

б) $3 \cos^2 x = 7 (\sin x + 1)$.

Решите неравенство:

○16.15. а) $\sin t > \frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\sin t > -\frac{1}{2}$;

в) $\sin t < \frac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $\sin t \leqslant -\frac{1}{2}$.

●16.16. а) $\sin t < \frac{1}{3}$;

б) $\sin t \geqslant -0{,}6$;

в) $\sin t \geqslant \frac{1}{3}$;

г) $\sin t < -0{,}6$.

●16.17. а) $5 \sin^2 t > 11 \sin t + 12$;

б) $5 \sin^2 t \leqslant 11 \sin t + 12$.

●16.18. а) $6 \cos^2 t + \sin t > 4$;

б) $6 \cos^2 t + \sin t \leqslant 4$.

●16.19. Вычислите:

а) $\cos \left(\arcsin \left(-\frac{5}{13}\right)\right)$;

б) $\operatorname{tg} (\arcsin 0{,}6)$;

в) $\cos \left(\arcsin \frac{8}{17}\right)$;

г) $\operatorname{ctg} (\arcsin (-0{,}8))$.

§ 17. Арктангенс и арккотангенс. Решение уравнений $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$

Вычислите:

17.1. а) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$;

б) $\operatorname{arctg} 1$; г) $\operatorname{arctg} 0$.

17.2. а) $\operatorname{arctg} (-1)$; в) $\operatorname{arctg} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

б) $\operatorname{arctg} \left(-\sqrt{3}\right)$; г) $\operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

17.3. а) $\operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $\operatorname{arcctg} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

б) $\operatorname{arcctg} 1$; г) $\operatorname{arcctg} 0$.

○**17.4.** а) $\operatorname{arcctg} (-1) + \operatorname{arctg} (-1)$;

б) $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \operatorname{arcctg} \left(-\sqrt{3}\right)$;

в) $\operatorname{arcctg} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$;

г) $\arccos \left(-\frac{1}{2}\right) - \operatorname{arcctg} \left(-\sqrt{3}\right)$.

Решите уравнение:

17.5. а) $\operatorname{tg} x = 1$; в) $\operatorname{tg} x = -1$;

б) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; г) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

17.6. а) $\operatorname{tg} x = 0$; в) $\operatorname{tg} x = -3$;

б) $\operatorname{tg} x = -2$; г) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$.

17.7. а) $\operatorname{ctg} x = 1$;

б) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$;

в) $\operatorname{ctg} x = 0$;

г) $\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

○17.8. а) $\operatorname{tg}^2 x - 6 \operatorname{tg} x + 5 = 0$;

б) $\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x - 3 = 0$.

○17.9. а) $\operatorname{tg} (\pi + x) = \sqrt{3}$;

б) $2 \operatorname{ctg} (2\pi + x) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sqrt{3}$;

в) $-\sqrt{3} \operatorname{tg} (\pi - x) = 1$;

г) $\operatorname{ctg} (2\pi - x) + \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = 2$.

○17.10. Постройте график функции:
а) $y = \arccos x + \arccos (-x)$;
б) $y = \arccos \frac{1}{x} + \arccos \left(-\frac{1}{x}\right)$;
в) $y = \operatorname{arcctg} x + \operatorname{arcctg} (-x)$;
г) $y = \operatorname{arcctg} \sqrt{x} + \operatorname{arcctg} \left(-\sqrt{x}\right)$.

§ 18. Тригонометрические уравнения

Решите уравнение:

○18.1. а) $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\cos \frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$;

в) $\sin \frac{x}{4} = \frac{1}{2}$;

г) $\cos 4x = 0$.

○18.2. а) $\sin\left(-\frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\cos (-2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\operatorname{tg} (-4x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

г) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{x}{2}\right) = 1$.

○18.3. а) $2 \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$;

б) $\sqrt{3} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = 3$;

в) $2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$;

г) $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 0$.

Решите уравнение:

○18.4. а) $\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = -1$;

б) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = -1$;

в) $2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{4}\right) = \sqrt{3}$;

г) $2\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \sqrt{2}$.

○18.5. а) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) - \cos(\pi + t) = 1$;

б) $\sin(\pi + t) + \sin(2\pi - t) - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) + 1{,}5 = 0$;

в) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) - \sin(\pi + t) = \sqrt{2}$;

г) $\sin(\pi + t) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \sqrt{3}$.

○18.6. а) $3\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0$;

б) $3\sin^2 2x + 10\sin 2x + 3 = 0$;

в) $4\sin^2 x + 11\sin x - 3 = 0$;

г) $2\sin^2 \frac{x}{2} - 3\sin\frac{x}{2} + 1 = 0$.

○18.7. а) $6\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$;

б) $2\cos^2 3x - 5\cos 3x - 3 = 0$;

в) $2\cos^2 x - \cos x - 3 = 0$;

г) $2\cos^2 \frac{x}{3} + 3\cos\frac{x}{3} - 2 = 0$.

○18.8. а) $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$;

б) $8\sin^2 2x + \cos 2x + 1 = 0$;

в) $5\cos^2 x + 6\sin x - 6 = 0$;

г) $4\sin 3x + \cos^2 3x = 4$.

○18.9. а) $3\,\mathrm{tg}^2 x + 2\,\mathrm{tg}\, x - 1 = 0$;

б) $\mathrm{ctg}^2 2x - 6\,\mathrm{ctg}\, 2x + 5 = 0$;

в) $2\,\mathrm{tg}^2 x + 3\,\mathrm{tg}\, x - 2 = 0$;

г) $7\,\mathrm{ctg}^2 \frac{x}{2} + 2\,\mathrm{ctg}\, \frac{x}{2} = 5$.

18.10. а) $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 0$;

б) $\sin x + \cos x = 0$;

в) $\sin x - 3 \cos x = 0$;

г) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 0$.

○18.11. а) $\sin^2 x + \sin x \cos x = 0$;

б) $\sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$;

в) $\sin^2 x = 3 \sin x \cos x$;

г) $\sqrt{3} \cos^2 x = \sin x \cos x$.

○18.12. а) $\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0$;

б) $\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = 0$;

в) $\sin^2 x + \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0$;

г) $3 \sin^2 x + \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0$.

○18.13. Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $[0;\ 2\pi]$:

а) $\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)(\sin x + 1) = 0$;

б) $\left(\cos x + \frac{1}{2}\right)(\cos x - 1) = 0$;

в) $\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$;

г) $(1 + \cos x)\left(\sqrt{2} \sin x - 1\right) = 0$.

○**18.14.** а) Найдите корни уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $[0;\ 4\pi]$.

б) Найдите корни уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $[-2\pi;\ 3\pi]$.

Найдите корни уравнения на заданном промежутке:

○**18.15.** а) $\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $[0;\ 2\pi]$;

б) $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $[-\pi;\ \pi]$;

в) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $[-3\pi;\ 3\pi]$;

г) $\operatorname{ctg} 4x = -1$, $[0;\ \pi]$.

●**18.16.** а) $\sin x = -\frac{1}{2}$, $[-4;\ 4]$;

б) $\cos x = 1$, $[-6;\ 16]$.

●**18.17.** а) $\sin \frac{x}{2} = 0$, $[-12;\ 18]$;

б) $\cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $[1;\ 7]$.

○**18.18.** Решите уравнение $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$ и найдите:

а) наименьший положительный корень;

б) корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$;

в) наибольший отрицательный корень;

г) корни, принадлежащие интервалу $\left(-\pi;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

○**18.19.** Решите уравнение $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \frac{1}{2}$ и найдите:

а) наименьший положительный корень;

б) корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$;

в) наибольший отрицательный корень;

г) корни, принадлежащие интервалу $\left(-\pi;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Решите уравнение:

○18.20. а) $\sin^2 \frac{3x}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin x - \cos^2 \frac{3x}{4} + 1$;

б) $\cos^2 2x - 1 - \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin^2 2x$.

○18.21. а) $\mathrm{tg}\, x - 2\,\mathrm{ctg}\, x + 1 = 0$;

в) $2\,\mathrm{ctg}\, x - 3\,\mathrm{tg}\, x + 5 = 0$;

б) $\frac{\mathrm{tg}\, x + 5}{2} = \frac{1}{\cos^2 x}$;

г) $\frac{7 - \mathrm{ctg}\, x}{4} = \frac{1}{\sin^2 x}$.

○18.22. а) $2\cos^2 \frac{x}{2} + \sqrt{3}\cos \frac{x}{2} = 0$;

в) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2\, 3x - 3\,\mathrm{tg}\, 3x = 0$;

б) $4\cos^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 3 = 0$;

г) $4\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 0$.

●18.23. а) $\sin^2 x - \frac{12 - \sqrt{2}}{2}\sin x - 3\sqrt{2} = 0$;

б) $\cos^2 x - \frac{8 - \sqrt{3}}{2}\cos x - 2\sqrt{3} = 0$.

○18.24. а) $\sin 2x = \cos 2x$;

в) $\sin \frac{x}{2} = \sqrt{3}\cos \frac{x}{2}$;

б) $\sqrt{3}\sin 3x = \cos 3x$;

г) $\sqrt{2}\sin 17x = \sqrt{6}\cos 17x$.

○18.25. а) $2\sin^2 2x - 5\sin 2x\cos 2x + 2\cos^2 2x = 0$;

б) $3\sin^2 3x + 10\sin 3x\cos 3x + 3\cos^2 3x = 0$.

○18.26. а) $\sin^2 \frac{x}{2} = 3\cos^2 \frac{x}{2}$;

б) $\sin^2 4x = \cos^2 4x$.

○18.27. а) $5\sin^2 x - 14\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 2$;

б) $3\sin^2 x - \sin x\cos x = 2$;

в) $2\cos^2 x - \sin x\cos x + 5\sin^2 x = 3$;

г) $4\sin^2 x - 2\sin x\cos x = 3$.

Решите уравнение:

○18.28. а) $5\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x + 6\cos^2 x = 5$;

б) $2\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 4$.

○18.29. а) $3\sin^2 2x - 2 = \sin 2x\cos 2x$;

б) $2\sin^2 4x - 4 = 3\sin 4x\cos 4x - 4\cos^2 4x$.

○18.30. а) $4\sin^2 \frac{x}{2} - 3 = 2\sin \frac{x}{2}\cos \frac{x}{2}$;

б) $3\sin^2 \frac{x}{3} + 4\cos^2 \frac{x}{3} = 3 + \sqrt{3}\sin \frac{x}{3}\cos \frac{x}{3}$.

○18.31. а) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0$;

б) $2\sin(\pi - 3x) + \cos(2\pi - 3x) = 0$.

○18.32. а) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) - 3\cos\left(\pi - \frac{x}{2}\right) = 0$;

б) $\sqrt{3}\sin\left(\pi - \frac{x}{3}\right) + 3\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{3}\right) = 0$.

●18.33. а) $\sqrt{16 - x^2} \cdot \sin x = 0$;

б) $\sqrt{7x - x^2}\,(2\cos x - 1) = 0$.

●18.34. а) $\left(\sqrt{2}\cos x - 1\right)\sqrt{4x^2 - 7x + 3} = 0$;

б) $\left(2\sin x - \sqrt{3}\right)\sqrt{3x^2 - 7x + 4} = 0$.

●18.35. Найдите область значений функции:

а) $y = \cos 3x + \sqrt{\cos^2 3x - 1}$;

б) $y = \sin 2x + \sqrt{\sin^2 4x - 1}$.

ГЛАВА 4. Преобразование тригонометрических выражений

§ 19. Синус и косинус суммы и разности аргументов

19.1. Представив 105° как сумму 60° + 45°, вычислите:

а) $\sin 105°$; б) $\cos 105°$.

Упростите выражение:

19.2. а) $\sin(\alpha + \beta) - \sin\alpha\cos\beta$;

б) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \frac{1}{2}\sin\alpha$;

в) $\sin\alpha\sin\beta + \cos(\alpha + \beta)$;

г) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$.

19.3. а) $\sin\left(\frac{5\pi}{6} - \alpha\right) - \frac{1}{2}\cos\alpha$;

б) $\sqrt{3}\cos\alpha - 2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$;

в) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha + \cos\left(\alpha - \frac{5\pi}{3}\right)$;

г) $\sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\alpha$.

19.4. а) $\cos(\alpha - \beta) - \cos\alpha\cos\beta$;

б) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$;

в) $\sin\alpha\cos\beta - \sin(\alpha - \beta)$;

г) $\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$.

Докажите тождество:

19.5. а) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(-\alpha)\cos(-\beta) = \sin\beta\cos\alpha$;

б) $\cos(\alpha + \beta) + \sin(-\alpha)\sin(-\beta) = \cos\alpha\cos\beta$.

19.6. а) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$;

б) $\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$.

○19.7. а) $\sin(30° - \alpha) - \cos(60° - \alpha) = -\sqrt{3}\sin\alpha$;

б) $\sin(30° - \alpha) + \sin(30° + \alpha) = \cos\alpha$.

19.8. а) $\sin 5x\cos 3x + \cos 5x\sin 3x = \sin 8x$;

б) $\cos 5x\cos 3x - \sin 5x\sin 3x = \cos 8x$.

19.9. а) $\sin 7x\cos 4x - \cos 7x\sin 4x = \sin 3x$;

б) $\cos 2x\cos 12x + \sin 2x\sin 12x = \cos 10x$.

Найдите значение выражения:

○19.10. а) $\cos 107°\cos 17° + \sin 107°\sin 17°$;

б) $\cos 36°\cos 24° - \sin 36°\sin 24°$;

в) $\sin 63°\cos 27° + \cos 63°\sin 27°$;

г) $\sin 51°\cos 21° - \cos 51°\sin 21°$.

○19.11. а) $\cos\frac{5\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{5\pi}{8}\sin\frac{3\pi}{8}$;

б) $\sin\frac{2\pi}{15}\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{15}\sin\frac{\pi}{5}$;

в) $\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{4}$;

г) $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{4}$.

Решите уравнение:

○19.12. а) $\sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = 1$;

б) $\cos 3x \cos 5x = \sin 3x \sin 5x$.

○19.13. а) $\sin 6x \cos x + \cos 6x \sin x = \frac{1}{2}$;

б) $\cos 5x \cos 7x - \sin 5x \sin 7x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

○19.14. а) $\cos 6x \cos 5x + \sin 6x \sin 5x = -1$;

б) $\sin 3x \cos 5x - \sin 5x \cos 3x = 0{,}5$.

○19.15. Найдите наименьший положительный корень (в градусах) уравнения:

а) $\sin x \cos 45° + \cos x \sin 45° =$

$= \cos 17° \cos 13° - \sin 17° \sin 13°$;

б) $\cos x \cos 60° - \sin x \sin 60° =$

$= \sin 200° \cos 25° + \cos 200° \sin 25°$.

○19.16. Найдите корни уравнения на заданном промежутке:

а) $\sin 0{,}2x \cos 0{,}8x + \cos 0{,}2x \sin 0{,}8x = \cos 3x \cos 2x +$
$+ \sin 3x \sin 2x$, $x \in [0; 3\pi]$;

б) $\cos 0{,}7x \cos 1{,}3x - \sin 0{,}7x \sin 1{,}3x = \sin 7x \cos 9x -$
$- \sin 9x \cos 7x$, $x \in [-\pi; \pi]$.

○19.17. Зная, что $\sin t = \frac{3}{5}$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$, вычислите:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + t\right)$; в) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right)$;

б) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)$; г) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + t\right)$.

○19.18. Зная, что $\cos t = -\frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{2} < t < \pi$, вычислите:

а) $\sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$; в) $\cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$;

б) $\cos\left(t - \frac{3\pi}{2}\right)$; г) $\sin\left(t - \frac{3\pi}{2}\right)$.

●19.19. Зная, что $\cos\alpha = \frac{15}{17}$, $\cos\beta = \frac{4}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, найдите значение выражения:

а) $\sin(\alpha - \beta)$; б) $\cos(\alpha - \beta)$.

●19.20. Зная, что $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = -\frac{15}{17}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, найдите значение выражения:

а) $\sin(\alpha - \beta)$; б) $\cos(\alpha - \beta)$.

Вычислите:

○19.21. а) $\sin 77° \cos 17° - \sin 13° \cos 73°$;

б) $\cos 125° \cos 5° + \sin 55° \cos 85°$.

○19.22. а) $\frac{\cos 105° \cos 5° + \sin 105° \cos 85°}{\sin 95° \cos 5° - \cos 95° \sin 185°}$;

б) $\frac{\sin 75° \cos 5° - \cos 75° \cos 85°}{\cos 375° \cos 5° - \sin 15° \sin 365°}$.

Решите уравнение:

○19.23. а) $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \cos x = 0{,}5$;

б) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + \sin\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

○19.24. а) $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = 1$;

б) $\sin x - \cos x = 1$;

в) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = 1$;

г) $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$.

○19.25. а) $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = 1$;

б) $\sin x + \cos x = 1$;

в) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = 1$;

г) $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$.

●19.26. Решите неравенство:

а) $\sin x \cos 3x + \cos x \sin 3x > \frac{1}{2}$;

б) $\cos 2x \cos 5x - \sin 2x \sin 5x < -\frac{1}{3}$;

в) $\sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{4} \sin \frac{x}{2} < \frac{1}{3}$;

г) $\sin 2x \sin 5x + \cos 2x \cos 5x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

§ 20. Тангенс суммы и разности аргументов

Вычислите:

20.1. а) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}$; в) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{12}$;

б) $\operatorname{tg} 105°$; г) $\operatorname{tg} 165°$.

20.2. а) $\frac{\operatorname{tg} 25° + \operatorname{tg} 20°}{1 - \operatorname{tg} 25° \operatorname{tg} 20°}$; в) $\frac{\operatorname{tg} 9° + \operatorname{tg} 51°}{1 - \operatorname{tg} 9° \operatorname{tg} 51°}$;

б) $\frac{1 - \operatorname{tg} 70° \operatorname{tg} 65°}{\operatorname{tg} 70° + \operatorname{tg} 65°}$; г) $\frac{1 + \operatorname{tg} 54° \operatorname{tg} 9°}{\operatorname{tg} 54° - \operatorname{tg} 9°}$.

○20.3. а) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$;

б) $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{5}$;

в) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$, если $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{4}{3}$;

г) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, если $\operatorname{ctg} \alpha = 1{,}\dot{6}$.

○20.4. Известно, что $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{3}$. Найдите:

а) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$; б) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$.

○20.5. Известно, что $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{5}$, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = -3$. Вычислите:

а) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$; б) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$.

20.6. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\operatorname{tg} 2{,}22 + \operatorname{tg} 0{,}92}{1 - \operatorname{tg} 2{,}22 \operatorname{tg} 0{,}92}$; б) $\dfrac{\operatorname{tg} 1{,}47 - \operatorname{tg} 0{,}69}{1 + \operatorname{tg} 1{,}47 \operatorname{tg} 0{,}69}$.

○20.7. а) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right)}$; б) $\dfrac{\operatorname{tg}(45° + \alpha) - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}(45° + \alpha)\operatorname{tg}\alpha}$.

○20.8. Докажите тождество:

а) $\dfrac{1 - \operatorname{tg} 2\alpha}{1 + \operatorname{tg} 2\alpha} = \operatorname{tg}(45° - 2\alpha)$;

б) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} + \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)} = 2$.

○20.9. Решите уравнение:

а) $\dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x} = 1$; б) $\dfrac{\operatorname{tg} 5x - \operatorname{tg} 3x}{1 + \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 5x} = \sqrt{3}$.

○20.10. Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi]$:

а) $\dfrac{\sqrt{3} - \operatorname{tg} x}{1 + \sqrt{3}\operatorname{tg} x} = 1$; б) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} - \operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}\operatorname{tg} 2x + 1} = \sqrt{3}$.

○20.11. а) Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = 3$.

б) Найдите $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 0{,}2$.

○20.12. а) Зная, что $\operatorname{tg}\alpha = 3$ и $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 1$, найдите $\operatorname{tg}\beta$.

б) Зная, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}$ и $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = 2$, найдите $\operatorname{tg}\beta$.

○20.13. Известно, что $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Найдите:

а) $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$; б) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

○20.14. Известно, что $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Найдите:

а) $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$; б) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$.

●20.15. Докажите, что прямые $y = 3x + 1$ и $y = 6 - 2x$ пересекаются под углом $45°$.

●20.16. Точка K — середина стороны CD квадрата $ABCD$. Чему равен угол между диагональю AC и отрезком BK?

§ 21. Формулы двойного аргумента

Упростите выражение:

21.1. а) $\frac{\sin 2t}{\cos t} - \sin t$; в) $\cos^2 t - \cos 2t$;

б) $\frac{\sin 6t}{\cos^2 3t}$; г) $\frac{\cos 2t}{\cos t - \sin t} - \sin t$.

21.2. а) $\frac{\sin 40°}{\sin 20°}$; в) $\frac{\sin 100°}{2\cos 50°}$;

б) $\frac{\cos 80°}{\cos 40° + \sin 40°}$; г) $\frac{\cos 36° + \sin^2 18°}{\cos 18°}$.

Вычислите:

21.3. а) $2\sin 15°\cos 15°$; в) $\cos^2 15° - \sin^2 15°$;

б) $(\cos 75° - \sin 75°)^2$; г) $(\cos 15° + \sin 15°)^2$.

21.4. а) $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$; в) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$;

б) $\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\right)^2$.

21.5. а) $\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}$; б) $\frac{\operatorname{tg} 75°}{1 - \operatorname{tg}^2 75°}$.

21.6. Докажите тождество:

а) $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\sin x$; в) $\sin 2x\cos 2x = \frac{1}{2}\sin 4x$;

б) $\cos^2\frac{x}{4} - \sin^2\frac{x}{4} = \cos\frac{x}{2}$; г) $\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos x$.

Докажите тождество:

21.7. а) $\cos(2\alpha + 2\beta) = \cos^2(\alpha + \beta) - \sin^2(\alpha + \beta)$;

б) $\sin(2\alpha + 2\beta) = 2\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha + \beta)$.

21.8. а) $\operatorname{tg}(2\alpha + 2\beta) = \dfrac{2\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}{1 - \operatorname{tg}^2(\alpha + \beta)}$;

б) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{2\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)}$.

○21.9. Известно, что $\sin t = \frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{2} < t < \pi$. Найдите:

а) $\sin 2t$;
б) $\cos 2t$;
в) $\operatorname{tg} 2t$;
г) $\operatorname{ctg} 2t$.

○21.10. Известно, что $\cos x = 0{,}8$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Найдите:

а) $\sin 2x$;
б) $\cos 2x$;
в) $\operatorname{tg} 2x$;
г) $\operatorname{ctg} 2x$.

○21.11. а) Дано: $\cos t = \frac{3}{4}$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$.

Вычислите: $\cos\frac{t}{2}$; $\sin\frac{t}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{t}{2}$; $\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$.

б) Дано: $\operatorname{ctg} t = \frac{3}{4}$, $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$.

Вычислите: $\cos\frac{t}{2}$; $\sin\frac{t}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{t}{2}$; $\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$.

●21.12. а) Дано: $\sin 2x = -\frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$.

Вычислите: $\cos x$; $\sin x$; $\operatorname{tg} x$; $\operatorname{ctg} x$.

б) Дано: $\operatorname{tg} 2x = \frac{3}{4}$, $\pi < x < \frac{5\pi}{4}$.

Вычислите: $\cos x$; $\sin x$; $\operatorname{tg} x$; $\operatorname{ctg} x$.

Упростите выражение:

○21.13. а) $\dfrac{\sin t}{2\cos^2 \frac{t}{2}}$; в) $\dfrac{\sin 4t}{\cos 2t}$;

б) $\dfrac{\cos t}{\cos \frac{t}{2} + \sin \frac{t}{2}}$; г) $\dfrac{\cos 2t - \sin 2t}{\cos 4t}$.

○21.14. а) $\dfrac{\sin 2t - 2\sin t}{\cos t - 1}$; в) $\sin 2t \operatorname{ctg} t - 1$;

б) $\dfrac{\cos 2t - \cos^2 t}{1 - \cos^2 t}$; г) $(\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t)\sin 2t$.

○21.15. а) $\dfrac{2}{\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t}$; б) $\dfrac{2}{\operatorname{tg} t - \operatorname{ctg} t}$.

○21.16. а) $(1 - \operatorname{tg}^2 t)\cos^2 t$; б) $2\cos^2 \dfrac{\pi + t}{4} - 2\sin^2 \dfrac{\pi + t}{4}$.

Докажите тождество:

○21.17. а) $(\sin t - \cos t)^2 = 1 - \sin 2t$;

б) $2\cos^2 t = 1 + \cos 2t$;

в) $(\sin t + \cos t)^2 = 1 + \sin 2t$;

г) $2\sin^2 t = 1 - \cos 2t$.

○21.18. а) $\cos^4 t - \sin^4 t = \cos 2t$;

б) $\cos^4 t + \sin^4 t = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2t$.

○21.19. а) $\operatorname{ctg} t - \sin 2t = \operatorname{ctg} t \cos 2t$;

б) $\sin 2t - \operatorname{tg} t = \cos 2t \operatorname{tg} t$.

○21.20. а) $\sin^2 2t = \dfrac{1 - \cos 4t}{2}$; в) $2\sin^2 2t = 1 + \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - 4t\right)$;

б) $2\sin^2 \dfrac{t}{2} + \cos t = 1$; г) $2\cos^2 t - \cos 2t = 1$.

Докажите тождество:

○21.21. а) $\cos^2 3t = \dfrac{1 + \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 6t\right)}{2}$;

б) $\dfrac{1 - \cos t}{1 + \cos t} = \operatorname{tg}^2 \dfrac{t}{2}$;

в) $\cos^2 3t = \dfrac{1 - \cos(6t - 3\pi)}{2}$;

г) $\dfrac{1 - \cos t}{\sin t} = \operatorname{tg} \dfrac{t}{2}$.

○21.22. а) $1 + \sin\alpha = 2\cos^2\left(45^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right)$;

б) $2\sin^2(45^\circ - \alpha) + \sin 2\alpha = 1$;

в) $1 - \sin\alpha = 2\sin^2\left(45^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right)$;

г) $2\cos^2(45^\circ + \alpha) + \sin 2\alpha = 1$.

○21.23. Вычислите (с помощью формул понижения степени):

а) $\sin 22{,}5^\circ$;

б) $\cos 22{,}5^\circ$;

в) $\sin \dfrac{3\pi}{8}$;

г) $\cos \dfrac{3\pi}{8}$.

Решите уравнение:

○21.24. а) $\sin 2x - 2\cos x = 0$;

б) $\sin 2x - \sin x = 0$;

в) $2\sin x = \sin 2x$;

г) $\sin 2x + \cos x = 0$.

○21.25. а) $\sin x \cos x = \dfrac{1}{4}$;

б) $\sin 4x \cos 4x = \dfrac{1}{2}$;

в) $\cos^2 \dfrac{x}{3} - \sin^2 \dfrac{x}{3} = \dfrac{1}{2}$;

г) $\sin^2 x - \cos^2 x = \dfrac{1}{2}$.

○21.26. а) $1 - \cos x = 2\sin \dfrac{x}{2}$;

б) $1 + \cos x = 2\cos \dfrac{x}{2}$.

○21.27. а) $1 - \cos x = \sin x \sin \dfrac{x}{2}$;

б) $\sin x = \operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2}(1 + \cos x)$.

○21.28. Решите уравнение:

а) $\sin^2 2x = 1$;

б) $\cos^2 4x = \frac{1}{2}$;

в) $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{3}{4}$;

г) $\cos^2 \frac{x}{4} = \frac{1}{4}$.

○21.29. Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$:

а) $\cos 2x + 3 \sin x = 1$;

б) $\sin^2 x = -\cos 2x$;

в) $\cos 2x = \cos^2 x$;

г) $\cos 2x = 2 \sin^2 x$.

Вычислите:

21.30. а) $\sin 11°15' \cos 11°15' \cos 22°30' \cos 45°$;

б) $\sin \frac{\pi}{48} \cos \frac{\pi}{48} \cos \frac{\pi}{24} \cos \frac{\pi}{12}$.

○21.31. а) $\frac{1 + \cos 40° + \cos 80°}{\sin 80° + \sin 40°} \cdot \operatorname{tg} 40°$;

б) $\frac{1 - \cos 25° + \cos 50°}{\sin 50° - \sin 25°} - \operatorname{tg} 65°$.

○21.32. Представив $3x$ в виде $x + 2x$, докажите тождество:

а) $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$;

б) $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$.

○21.33. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$, если:

а) $f(x) = 2 \cos 2x + \sin^2 x$;

б) $f(x) = 2 \sin^2 3x - \cos 6x$.

○21.34. Найдите наибольший отрицательный корень (в градусах) уравнения:

а) $\cos x = \frac{\sin 22{,}5° \cos 22{,}5°}{\cos^2 67{,}5° - \sin^2 67{,}5°}$;

б) $\sin x = \frac{\sin^2 75° - \cos^2 75°}{4 \sin 15° \cos 15°}$.

○21.35. Решите уравнение:

а) $3 \sin 2x + \cos 2x = 1$;

б) $\cos 4x + 2 \sin 4x = 1$.

●**21.36.** Найдите корни уравнения на заданном промежутке:

а) $4\sin x + \sin 2x = 0,\quad x \in [0;\ 2\pi]$;

б) $\cos^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,\quad x \in \left[\frac{3\pi}{4};\ \pi\right]$.

●**21.37.** Сколько корней имеет уравнение $2\cos^2\frac{x}{2} - \cos\frac{\pi}{9} = 1$ на отрезке $[-2\pi;\ 2\pi]$? Найдите эти корни.

●**21.38.** Сколько корней имеет уравнение:

а) $(\cos x - \sin x)^2 = 1 - 2\sin 2x$,

на отрезке $\left[\frac{20\pi}{9};\ \frac{28\pi}{9}\right]$;

б) $2\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) + 1 = 0$,

на отрезке $\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$?

§ 22. Преобразование сумм тригонометрических функций в произведения

Представьте в виде произведения:

22.1. а) $\sin 40^\circ + \sin 16^\circ$; в) $\sin 10^\circ + \sin 50^\circ$;

б) $\sin 20^\circ - \sin 40^\circ$; г) $\sin 52^\circ - \sin 36^\circ$.

22.2. а) $\cos 15^\circ + \cos 45^\circ$; в) $\cos 20^\circ + \cos 40^\circ$;

б) $\cos 46^\circ - \cos 74^\circ$; г) $\cos 75^\circ - \cos 15^\circ$.

22.3. а) $\sin\frac{\pi}{5} - \sin\frac{\pi}{10}$; в) $\sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{7}$;

б) $\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{4}$; г) $\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{11}$.

22.4. а) $\cos\frac{\pi}{10} - \cos\frac{\pi}{20}$; в) $\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{\pi}{11}$;

б) $\cos\frac{11\pi}{12} + \cos\frac{3\pi}{4}$; г) $\cos\frac{3\pi}{8} + \cos\frac{5\pi}{4}$.

Представьте в виде произведения:

22.5. а) $\sin 3t - \sin t$;

б) $\cos(\alpha - 2\beta) - \cos(\alpha + 2\beta)$;

в) $\cos 6t + \cos 4t$;

г) $\sin(\alpha - 2\beta) - \sin(\alpha + 2\beta)$.

22.6. а) $\operatorname{tg} 25^\circ + \operatorname{tg} 35^\circ$;
в) $\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 40$;

б) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{10}$;
г) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$.

○22.7. Вычислите:

а) $\dfrac{\cos 68^\circ - \cos 22^\circ}{\sin 68^\circ - \sin 22^\circ}$;
б) $\dfrac{\sin 130^\circ + \sin 110^\circ}{\cos 130^\circ + \cos 110^\circ}$.

○22.8. Проверьте равенство:

а) $\sin 35^\circ + \sin 25^\circ = \cos 5^\circ$;

б) $\sin 40^\circ + \cos 70^\circ = \cos 10^\circ$;

в) $\cos 12^\circ - \cos 48^\circ = \sin 18^\circ$;

г) $\cos 20^\circ - \sin 50^\circ = \sin 10^\circ$.

○22.9. Докажите тождество:

а) $\dfrac{\sin 2\alpha + \sin 6\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 6\alpha} = \operatorname{tg} 4\alpha$;

б) $\dfrac{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha \operatorname{tg}\alpha$.

Решите уравнение:

○22.10. а) $\cos x + \cos 3x = 0$;
в) $\cos x = \cos 5x$;

б) $\sin 12x + \sin 4x = 0$;
г) $\sin 3x = \sin 17x$.

○22.11. а) $\sin x + \sin 2x - \sin 3x = 0$;

б) $\cos 3x - \cos 5x = \sin 4x$.

○22.12. Представьте в виде произведения:

а) $\frac{1}{2} - \cos t$;
в) $1 + 2\cos t$;

б) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin t$;
г) $\cos t + \sin t$.

Представьте в виде произведения:

○22.13. а) $\sin 5x + 2\sin 6x + \sin 7x$;

б) $2\cos x + \cos 2x + \cos 4x$.

○22.14. а) $\sin t + \sin 2t + \sin 3t + \sin 4t$;

б) $\cos 2t - \cos 4t - \cos 6t + \cos 8t$.

○22.15. Докажите, что верно равенство:

а) $\sin 20^\circ + \sin 40^\circ - \cos 10^\circ = 0$;

б) $\cos 85^\circ + \cos 35^\circ - \cos 25^\circ = 0$.

Решите уравнение:

○22.16. а) $\sin 3x = \cos 2x$;

б) $\sin(5\pi - x) = \cos(2x + 7\pi)$;

в) $\cos 5x = \sin 15x$;

г) $\sin(7\pi + x) = \cos(9\pi + 2x)$.

○22.17. а) $1 + \cos 6x = 2\sin^2 5x$;

б) $\cos^2 2x = \cos^2 4x$;

в) $\sin^2 \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{7x}{2}$;

г) $\sin^2 x + \sin^2 3x = 1$.

○22.18. а) $2\sin^2 x + \cos 5x = 1$;

б) $2\sin^2 3x - 1 = \cos^2 4x - \sin^2 4x$.

○22.19. а) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 5x = 0$;

б) $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{ctg} x$;

в) $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 4x$;

г) $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} + \operatorname{ctg} \frac{3x}{2} = 0$.

○22.20. а) $\sin x + \sin 3x + \cos x + \cos 3x = 0$;

б) $\sin 5x + \sin x + 2\sin^2 x = 1$.

●22.21. Сколько корней имеет заданное уравнение на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

а) $\sin 2x + \sin 6x = \cos 2x$;

б) $2\cos^2 x - 1 = \sin 3x$?

●22.22. Найдите корни уравнения, принадлежащие интервалу $(0;\ 2{,}5)$:

а) $\cos 6x + \cos 8x = \cos 10x + \cos 12x$;

б) $\sin 2x + 5 \sin 4x + \sin 6x = 0$.

§ 23. Преобразование произведений тригонометрических функций в суммы

Преобразуйте произведение в сумму:

23.1. а) $\sin 23° \sin 32°$; в) $\sin 14° \cos 16°$;

б) $\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{8}$; г) $2 \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{5}$.

23.2. а) $\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$; в) $\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right)$;

б) $\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)$; г) $2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)$.

23.3. а) $\cos \alpha \sin(\alpha + \beta)$;

б) $\sin(60° + \alpha) \sin(60° - \alpha)$;

в) $\sin \beta \cos(\alpha + \beta)$;

г) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

Решите уравнение:

○23.4. а) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 0{,}25 = 0$;

б) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$.

○23.5. а) $2 \sin x \cos 3x + \sin 4x = 0$;

б) $\sin \frac{x}{2} \sin \frac{3x}{2} = \frac{1}{2}$.

○23.6. Докажите тождество:

а) $2 \sin t \sin 2t + \cos 3t = \cos t$;

б) $\sin \alpha - 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2} - 15°\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2} + 15°\right) = \frac{1}{2}$.

●**23.7.** Преобразуйте произведение в сумму:

а) $\sin 10^\circ \cos 8^\circ \cos 6^\circ$; б) $4 \sin 25^\circ \cos 15^\circ \sin 5^\circ$.

●**23.8.** Вычислите:

а) $\cos^2 3^\circ + \cos^2 1^\circ - \cos 4^\circ \cos 2^\circ$;

б) $\sin^2 10^\circ + \cos 50^\circ \cos 70^\circ$.

●**23.9.** Вычислите:

а) $\dfrac{1}{2 \sin 10^\circ} - 2 \sin 70^\circ$; б) $\dfrac{\operatorname{tg} 60^\circ}{\sin 40^\circ} + 4 \cos 100^\circ$.

○**23.10.** Решите уравнение:

а) $\sin 3x \cos x = \sin \dfrac{5x}{2} \cos \dfrac{3x}{2}$;

б) $2 \sin \left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) \sin \left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) + \sin^2 x = 0$;

в) $\sin 2x \cos x = \sin x \cos 2x$;

г) $\cos 2x \cos x = \cos 2{,}5x \cos 0{,}5x$.

○**23.11.** Найдите наименьший положительный и наибольший отрицательный корни уравнения:

а) $\sin x \sin 3x = 0{,}5$; б) $\cos x \cos 3x + 0{,}5 = 0$.

○**23.12.** Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = f(x)$, если:

а) $f(x) = \sin \left(x + \dfrac{\pi}{8}\right) \cos \left(x - \dfrac{\pi}{24}\right)$;

б) $f(x) = \sin \left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) \sin \left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

●**23.13.** Докажите тождество

$\cos^2 (45^\circ - \alpha) - \cos^2 (60^\circ + \alpha) - \cos 75^\circ \sin (75^\circ - 2\alpha) = \sin 2\alpha$.

ГЛАВА 5 Производная

§ 24. Предел последовательности

По заданной формуле n-го члена вычислите первые пять членов последовательности:

24.1. а) $y_n = 3 - 2n$; в) $y_n = n^3 - 1$;

б) $y_n = 2n^2 - n$; г) $y_n = \frac{3n-1}{2n}$.

24.2. а) $y_n = (-1)^n$; в) $y_n = (-1)^n \frac{1}{10^n}$;

б) $y_n = \frac{(-2)^n}{n^2+1}$; г) $y_n = \frac{(-1)^n + 2}{3n - 2}$.

О24.3. а) $y_n = 3\cos\frac{2\pi}{n}$; в) $y_n = 1 - \cos^2\frac{\pi}{n}$;

б) $y_n = \operatorname{tg}\left((-1)^n \frac{\pi}{4}\right)$; г) $y_n = \sin\pi n - \cos\pi n$.

О24.4. Найдите сумму первых восьми членов возрастающей последовательности квадратов простых чисел.

Указание: число 1 не считается ни простым, ни составным.

Составьте одну из возможных формул n-го члена последовательности по первым пяти ее членам:

24.5. а) 0, 1, 2, 3, 4, ... ; в) 5, 6, 7, 8, 9, ... ;

б) −1, −2, −3, −4, −5, ... ; г) 10, 9, 8, 7, 6, ...

24.6. а) 5, 10, 15, 20, 25, ... ; в) 4, 8, 12, 16, 20, ... ;

б) 6, 12, 18, 24, 30, ... ; г) 3, 6, 9, 12, 15, ...

О24.7. а) 3, 9, 27, 81, 243, ... ; в) 1, 8, 27, 64, 125, ... ;

б) 9, 16, 25, 36, 49, ... ; г) 2, 9, 28, 65, 126, ...

Составьте одну из возможных формул n-го члена последовательности по первым пяти ее членам:

○24.8. а) $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16}, \ldots$;

б) $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}, \frac{11}{12}, \ldots$;

в) $1,\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{27},\ \frac{1}{64},\ \frac{1}{125}, \ldots$;

г) $\frac{1}{3 \cdot 5},\ \frac{1}{5 \cdot 7},\ \frac{1}{7 \cdot 9},\ \frac{1}{9 \cdot 11},\ \frac{1}{11 \cdot 13}, \ldots$.

24.9. Выпишите первые четыре члена последовательности десятичных приближений числа $\sqrt{2}$:

а) по недостатку; б) по избытку.

○24.10. Укажите номер члена последовательности $y_n = \frac{2 - n}{5n + 1}$, равного:

а) 0; б) $-\frac{3}{26}$; в) $-\frac{1}{6}$; г) $-\frac{43}{226}$.

○24.11. Последовательность задана формулой

$$a_n = (2n - 1)(3n + 2).$$

Является ли членом последовательности число:

а) 0; б) 24; в) 153; г) −2?

○24.12. Какие из заданных последовательностей ограничены снизу?

а) $1,\ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$;

б) $-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ -5, \ldots$;

в) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$;

г) $5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0,\ -1, \ldots$.

○24.13. Какие из заданных последовательностей ограничены сверху?

а) $-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1, \ldots$;

б) $1,\ -1,\ 1,\ -2,\ 1,\ -3, \ldots$;

в) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$;

г) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$.

○24.14. Какие из заданных последовательностей являются ограниченными?

а) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n+1}, \ldots$;

б) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \ldots, \frac{2n-1}{2n}, \ldots$;

в) $5, -5, 5, -5, \ldots, (-1)^{n-1} \cdot 5, \ldots$;

г) $-2, 3, -4, 5, \ldots, (-1)^n (n+1), \ldots$.

Выясните, какие из приведенных последовательностей являются монотонными. Укажите характер монотонности:

○24.15. а) $y_n = 2n - 1$; в) $y_n = n^2 + 8$;

б) $y_n = 5^{-n}$; г) $y_n = \frac{2}{3n+1}$.

○24.16. а) $x_n = (-2)^n$; в) $y_n = n^3 - 5$;

б) $y_n = \cos\frac{\pi}{n+5}$; г) $y_n = \sqrt{n+8}$.

23.17. Приведите примеры последовательностей:

а) возрастающих и ограниченных сверху;

б) возрастающих и не ограниченных сверху;

в) убывающих и ограниченных снизу;

г) убывающих и не ограниченных снизу.

Вычислите $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$, если:

24.18. а) $x_n = \frac{5}{n^2}$; в) $x_n = \frac{-15}{n^2}$;

б) $x_n = \frac{-17}{n^3}$; г) $x_n = \frac{3}{\sqrt{n}}$.

○24.19. а) $x_n = \frac{7}{n} + \frac{8}{\sqrt{n}} + \frac{9}{n^3}$;

б) $x_n = 6 - \frac{7}{n^2} - \frac{3}{n} - \frac{3}{\sqrt{n}}$;

в) $x_n = \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2} - \frac{5}{n^3} + \frac{13}{n^4}$;

г) $x_n = \frac{1}{n} + \frac{3}{\sqrt{n}} - 4 + \frac{7}{n^2}$.

Вычислите $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$, если:

○24.20. а) $x_n = \dfrac{5n + 3}{n + 1}$; в) $x_n = \dfrac{3n + 1}{n + 2}$;

б) $x_n = \dfrac{7n - 5}{n + 2}$; г) $x_n = \dfrac{2n + 1}{3n - 1}$.

○24.21. а) $x_n = \dfrac{5}{2^n}$; в) $x_n = 7 \cdot 3^{-n}$;

б) $x_n = \dfrac{1}{2} \cdot 5^{-n}$; г) $x_n = \dfrac{4}{3^{n+1}}$.

○24.22. а) $x_n = \dfrac{2n^2 - 1}{n^2}$; в) $x_n = \dfrac{3 - n^2}{n^2}$;

б) $x_n = \dfrac{1 + 2n + n^2}{n^2}$; г) $x_n = \dfrac{3n - 4 - 2n^2}{n^2}$.

§ 25. Сумма бесконечной геометрической прогрессии

25.1. Найдите сумму геометрической прогрессии (b_n), если:

а) $b_1 = 3,\ q = \dfrac{1}{3}$; в) $b_1 = -1,\ q = 0{,}2$;

б) $b_1 = -5,\ q = -0{,}1$ г) $b_1 = 2,\ q = -\dfrac{1}{3}$.

25.2. Найдите сумму геометрической прогрессии:

а) 32, 16, 8, 4, 2, ... ; в) $27,\ 9,\ 3,\ 1,\ \dfrac{1}{3},\ \dots$;

б) $24,\ -8,\ \dfrac{8}{3},\ -\dfrac{8}{9},\ \dots$; г) $18,\ -6,\ 2,\ -\dfrac{2}{3},\ \dots$.

Вычислите:

○25.3. а) $2 + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dots$; в) $\dfrac{3}{2} - 1 + \dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{9} + \dots$;

б) $49 + 7 + 1 + \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{7^2} + \dots$; г) $125 + 25 + 5 + 1 + \dots$.

○25.4. а) $-6 + \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{27} + \dfrac{2}{243} - \dots$; в) $49 - 14 + 4 - \dfrac{8}{7} + \dots$;

б) $3 + \sqrt{3} + 1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dots$; г) $4 + 2\sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} + \dots$

25.5. Найдите знаменатель и сумму геометрической прогрессии (b_n), если:

а) $b_1 = -2,\ b_2 = 1$; в) $b_1 = 7,\ b_2 = -1$;

б) $b_1 = 3,\ b_2 = \frac{1}{3}$; г) $b_1 = -20,\ b_2 = 4$.

25.6. Найдите знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если:

а) $S = 2,\ b_1 = 3$; в) $S = -\frac{9}{4},\ b_1 = -3$;

б) $S = -10,\ b_1 = -5$; г) $S = 1{,}5,\ b_1 = 2$.

25.7. Найдите первый член геометрической прогрессии (b_n), если:

а) $S = 10,\ q = 0{,}1$; в) $S = 6,\ q = -0{,}5$;

б) $S = -3,\ q = -\frac{1}{3}$; г) $S = -21,\ q = \frac{1}{7}$.

○25.8. Найдите n-й член геометрической прогрессии (b_n), если:

а) $S = 15,\ q = -\frac{1}{3},\ n = 3$;

б) $S = -20,\ b_1 = -16,\ n = 4$;

в) $S = 20,\ b_1 = 22,\ n = 4$;

г) $S = 21,\ q = \frac{2}{3},\ n = 3$.

○25.9. Найдите сумму геометрической прогрессии (b_n), если:

а) $b_n = \frac{25}{3^n}$; в) $b_n = \frac{45}{6^n}$;

б) $b_n = (-1)^n \frac{13}{2^{n-1}}$; г) $b_n = (-1)^n \frac{7}{6^{n-2}}$.

○25.10. Найдите сумму геометрической прогрессии, если известно, что сумма первого и третьего ее членов равна 29, а второго и четвертого 11,6.

○25.11. Найдите геометрическую прогрессию, если ее сумма равна 24, а сумма первых трех членов равна 21.

○25.12. Составьте геометрическую прогрессию, если известно, что ее сумма равна 18, а сумма квадратов ее членов равна 162.

○25.13. Упростите выражение (при условии, что $x \neq \frac{\pi n}{2}$):

а) $\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \ldots + \sin^n x + \ldots$;

б) $\cos x - \cos^2 x + \cos^3 x - \cos^4 x + \ldots$;

в) $\cos^2 x + \cos^4 x + \cos^6 x + \cos^8 x + \ldots$;

г) $1 - \sin^3 x + \sin^6 x - \sin^9 x + \ldots$.

○25.14. Решите уравнение, если известно, что $|x| < 1$.

а) $x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^n + \ldots = 4$;

б) $2x - 4x^2 + 8x^3 - 16x^4 + \ldots = \frac{3}{8}$.

○25.15. Представьте в виде обыкновенной дроби:

а) 0,(15); б) 0,1(2); в) 0,(18); г) 0,2(34).

§ 26. Предел функции

26.1. Какая из функций, графики которых изображены на рисунках 19—22, имеет предел при $x \to +\infty$? При $x \to -\infty$? При $x \to \infty$?

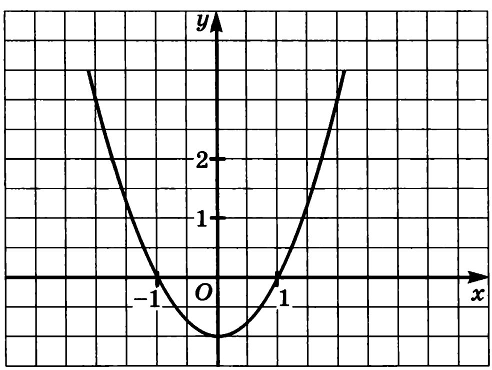

Рис. 19

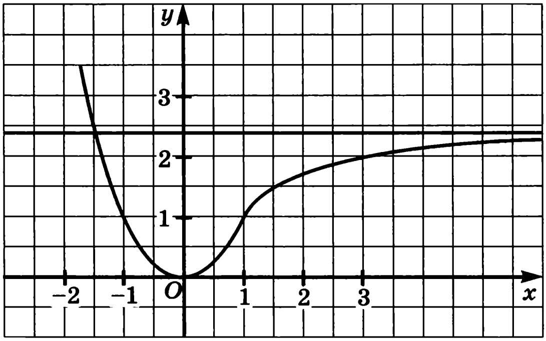

Рис. 20

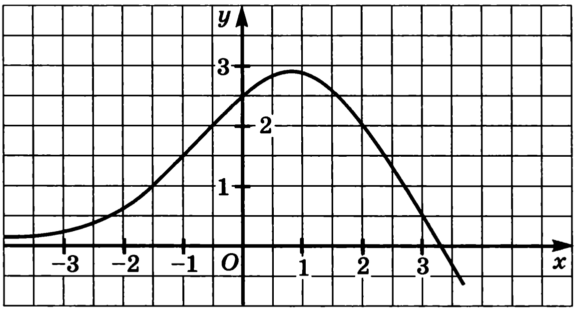

Рис. 21

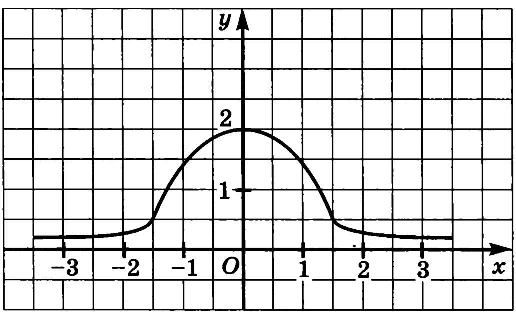

Рис. 22

26.2. Имеет ли функция $y = f(x)$ предел при $x \to +\infty$, при $x \to -\infty$, или при $x \to \infty$, и чему он равен, если:

а) прямая $y = 3$ является горизонтальной асимптотой графика функции на луче $(-\infty;\ 4]$;

б) прямая $y = -2$ является горизонтальной асимптотой графика функции на луче $[-6;\ +\infty)$;

в) прямая $y = -5$ является горизонтальной асимптотой графика функции на луче $(-\infty; 3]$;

г) прямая $y = 5$ является горизонтальной асимптотой графика функции на луче $[4; +\infty)$?

26.3. Постройте эскиз графика какой-нибудь функции $y = f(x)$, обладающей указанным свойством:

а) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 5$; в) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -5$;

б) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -2$; г) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.

О26.4. Постройте эскиз графика какой-нибудь функции $y = f(x)$, обладающей указанными свойствами:

а) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 5$ и $f(x) > 0$ на $(-\infty, +\infty)$;

б) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ и $f(x) < 0$ на $(-\infty, +\infty)$.

Постройте эскиз графика какой-нибудь функции $y = h(x)$, обладающей указанными свойствами:

О26.5. а) $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 4$ и функция возрастает;

б) $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 1$ и функция ограничена снизу;

в) $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 5$ и функция убывает;

г) $\lim\limits_{x \to \infty} h(x) = 1$ и функция ограничена.

26.6. Известно, что $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -3$. Вычислите:

а) $\lim\limits_{x \to +\infty} 6f(x)$; в) $\lim\limits_{x \to -\infty} 8f(x)$;

б) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{3}$; г) $\lim\limits_{x \to \infty} (0{,}4f(x))$.

26.7. Известно, что $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = -3$ и $\lim\limits_{x \to \infty} h(x) = 9$. Вычислите:

а) $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) + g(x))$; в) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)g(x)}{h(x)}$;

б) $\lim\limits_{x \to \infty} (g(x) \cdot f(x))$; г) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2h(x)}{3g(x)}$.

Вычислите:

○26.8. а) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right)$;

б) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{5}{x^3} + 1\right) \cdot \left(-\frac{8}{x^2} - 2\right)$;

в) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{2}{x^2} + \frac{8}{x^3}\right)$;

г) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{7}{x^6} - 2\right) \cdot \left(-\frac{6}{x^{10}} - 3\right)$.

○26.9. а) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x + 1}{x - 2}$;

б) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x - 4}{2x + 7}$;

в) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x - 4}{x + 3}$;

г) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{7x + 9}{6x - 1}$.

○26.10. а) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x^2 + 9}{x^2 + 2}$;

б) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x - 1}{x^2 + 7x + 5}$;

в) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{-2x - 1}{3x^2 - 4x + 1}$;

г) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{10x^2 + 4x - 3}{5x^2 + 2x + 1}$.

26.11. Какая из функций, графики которых изображены на рисунках 23—30, имеет предел при $x \to 3$? Чему равен этот предел?

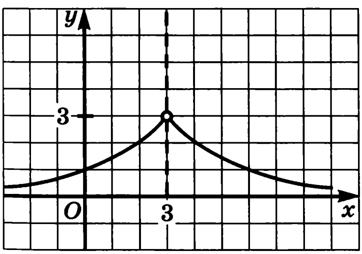

Рис. 23

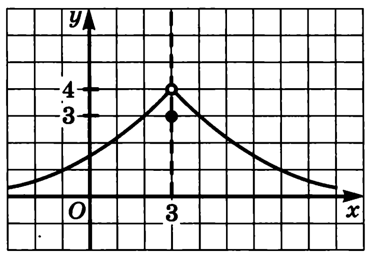

Рис. 24

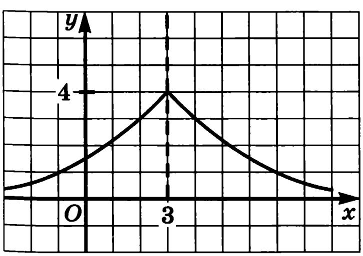

Рис. 25

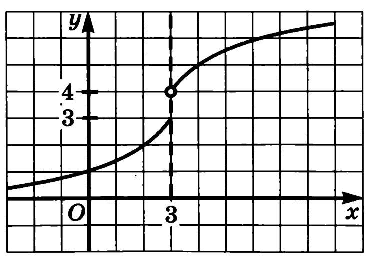

Рис. 26

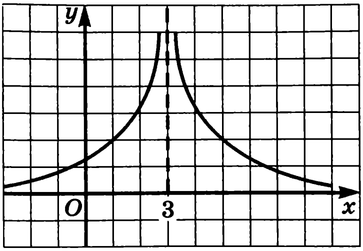

Рис. 27

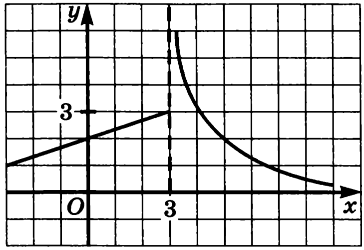

Рис. 28

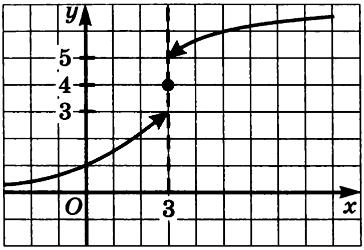

Рис. 29

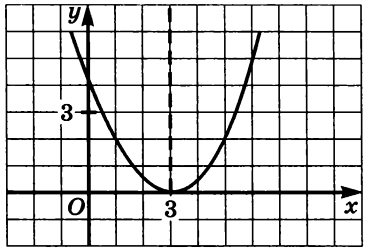

Рис. 30

26.12. Изобразите эскиз графика какой-нибудь функции $y = g(x)$, обладающей заданным свойством:

а) $\lim\limits_{x \to -1} g(x) = 2$; в) $\lim\limits_{x \to -7} g(x) = -4$;

б) $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = -3$; г) $\lim\limits_{x \to 5} g(x) = 3{,}5$.

26.13. На рисунке 31 изображен график функции $y = f(x)$. Найдите:

а) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; в) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$;

б) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$; г) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

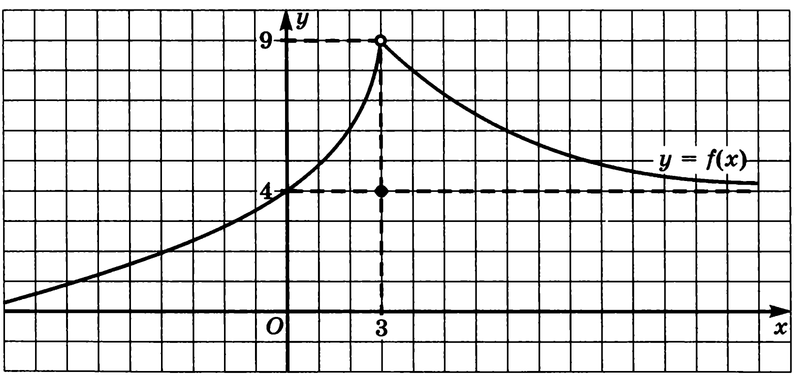

Рис. 31

Постройте эскиз графика какой-нибудь функции $y = f(x)$, обладающей заданными свойствами:

○**26.14.** а) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 4$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$;

б) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 10$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$;

в) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$;

г) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -4$.

○**26.15.** а) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$ и $f(2) = 3$;

б) $\lim\limits_{x \to -6} f(x) = 4$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$;

в) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 4$ и $f(-1)$ не существует;

г) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = -1$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -5$.

Вычислите:

○**26.16.** а) $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 3x + 5)$;

в) $\lim\limits_{x \to -1} (x^2 + 6x - 8)$;

б) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{2x + 3}{4x + 2}$;

г) $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}} \dfrac{7x - 14}{21x + 2}$.

○**26.17.** а) $\lim\limits_{x \to 5} \sqrt{x + 4}$;

в) $\lim\limits_{x \to 6} \sqrt{x + 3}$;

б) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3 + 4x}{2x^2 + 6x - 3}$;

г) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{5 - 2x}{3x^2 - 2x + 4}$.

○**26.18.** а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{x^2 - x}$;

в) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$;

б) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 4}{2 + x}$;

г) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{3 + x}{x^2 - 9}$.

○**26.19.** а) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin 3x + \sin x}{\cos 3x + \cos x}$;

б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 5x - \cos 3x}{\sin 5x + \sin 3x}$.

26.20. Найдите приращение функции $y = 2x - 3$ при переходе от точки $x_0 = 3$ к точке x_1, если:

а) $x_1 = 3{,}2$; б) $x_1 = 2{,}9$; в) $x_1 = 3{,}5$; г) $x_1 = 2{,}5$.

26.21. Найдите приращение функции $y = x^2 + 2x$ при переходе от точки $x_0 = -2$ к точке x_1, если:

а) $x_1 = -1{,}9$; б) $x_1 = -2{,}1$; в) $x_1 = -1{,}5$; г) $x_1 = -2{,}5$.

○26.22. Найдите приращение функции $y = \sqrt{x}$ при переходе от точки $x_0 = 1$ к точке $x_1 = x_0 + \Delta x$, если:

а) $\Delta x = 0,44$; в) $\Delta x = 0,21$;

б) $\Delta x = -0,19$; г) $\Delta x = 0,1025$.

26.23. По графикам функций, представленных на рисунках 32 и 33, найдите приращение аргумента и приращение функции при переходе от точки x_0 к точке x_1:

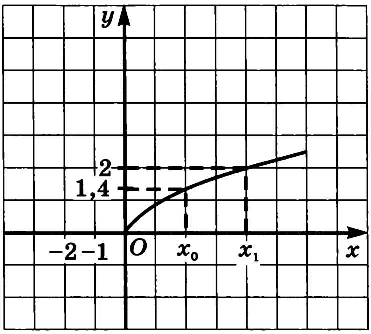

Рис. 32

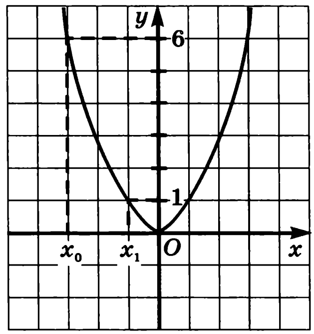

Рис. 33

○26.24. Найдите приращение функции $y = f(x)$ при переходе от точки x к точке $x + \Delta x$, если:

а) $f(x) = 3x + 5$; в) $f(x) = 4 - 2x$;

б) $f(x) = -x^2$; г) $f(x) = 2x^2$.

○26.25. Для функции $y = f(x)$ найдите Δf при переходе от точки x к точке $x + \Delta x$, если:

а) $f(x) = ax^2$; б) $f(x) = \frac{1}{x}$.

§ 27. Определение производной

27.1. Закон движения точки по прямой задается формулой $s(t) = 2t + 1$, где t — время (в секундах), $s(t)$ — отклонение точки в момент времени t (в метрах) от начального положения. Найдите среднюю скорость движения точки с момента $t_1 = 2$ с до момента:

а) $t_2 = 3$ с; в) $t_2 = 2,1$с;

б) $t_2 = 2,5$ с; г) $t_2 = 2,05$ с.

27.2. Закон движения точки по прямой задается формулой $s(t) = t^2$, где t — время (в секундах), $s(t)$ — отклонение точки в момент времени t (в метрах) от начального положения. Найдите среднюю скорость движения точки с момента $t_1 = 0$ с до момента:

а) $t_2 = 0,1$ с; в) $t_2 = 0,2$ с;

б) $t_2 = 0,01$ с; г) $t_2 = 0,02$ с.

27.3. Закон движения точки по прямой задается формулой $s = s(t)$, где t — время (в секундах), $s(t)$ — отклонение точки в момент времени t (в метрах) от начального положения. Найдите мгновенную скорость движения точки в момент времени t, если:

а) $s(t) = 4t + 1$; в) $s(t) = 3t + 2$;

б) $s(t) = 6t - 2$; г) $s(t) = 5t - 1$.

27.4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком. Определите значения $f'(x_1)$ и $f'(x_2)$, если график функции изображен:

а) на рис. 34; в) на рис. 36;

б) на рис. 35; г) на рис. 37.

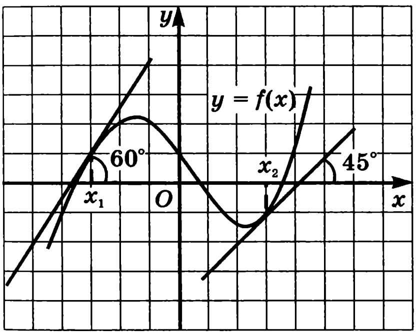

Рис. 34

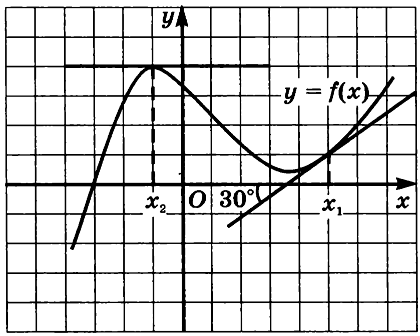

Рис. 35

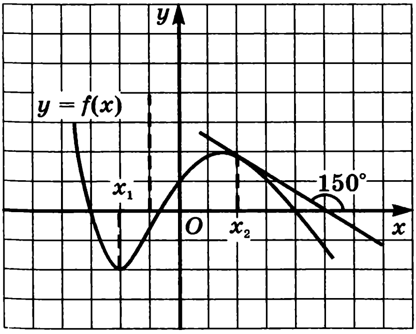

Рис. 36

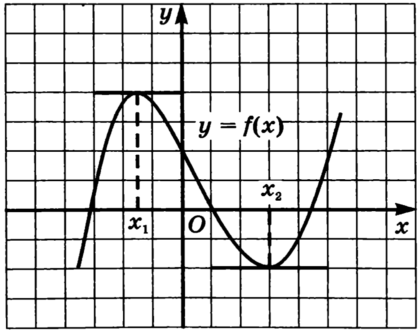

Рис. 37

27.5. Найдите скорость изменения функции в произвольной точке x:

а) $y = 9{,}5x - 3$; в) $y = 6{,}7x - 13$;

б) $y = -16x + 3$; г) $y = -9x + 4$.

Найдите скорость изменения функции $y = f(x)$ в указанной точке x_0:

27.6. а) $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$; в) $f(x) = x^2$, $x_0 = -2$;

б) $f(x) = x^2$, $x_0 = -1$; г) $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$.

27.7. а) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 2$; в) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 5$;

б) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = -1$; г) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = -0{,}5$.

○27.8. Закон движения точки по прямой задается формулой $s(t) = t^2$, где t — время (в секундах), $s(t)$ — отклонение точки в момент времени t (в метрах) от начального положения. Найдите скорость и ускорение в момент времени t, если:

а) $t = 1$ с; в) $t = 2$ с;

б) $t = 2{,}1$ с; г) $t = 3{,}5$ с.

Указание: ускорение — это скорость изменения скорости.

○27.9. На рисунке 38 изображен график движения туриста от базы и обратно. С какой скоростью он шел первые 2 часа? Последующие 2 часа? На какое максимальное расстояние удалился турист от базы? С какой скоростью он шел назад? Через сколько времени вернулся на базу? Сколько времени отдыхал в пути?

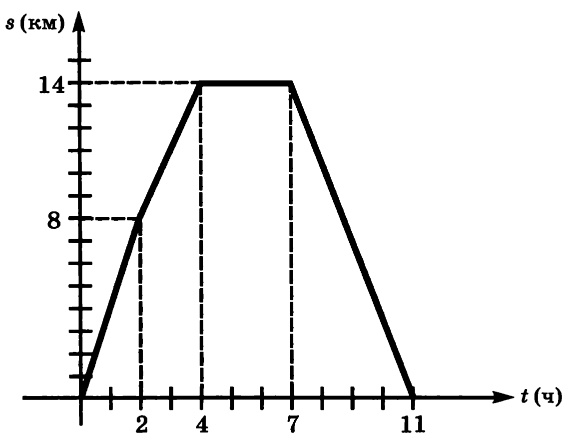

Рис. 38

○27.10. Закон движения точки по прямой задается формулой $s(t) = 2t^2 + t$, где t — время (в секундах), $s(t)$ — отклонение точки в момент времени t (в метрах) от начального положения. Найдите среднюю скорость движения точки с момента $t_1 = 0$ с до момента t_2, если:

а) $t_2 = 0{,}6$ с; в) $t_2 = 0{,}5$ с;

б) $t_2 = 0{,}2$ с; г) $t_2 = 0{,}1$ с.

○27.11. Закон движения точки по прямой задается формулой $s = s(t)$, где t — время, $s(t)$ — отклонение точки в момент времени t от начального положения. Найдите мгновенную скорость движения точки в момент времени t, если:

а) $s(t) = t^2 + 3$; в) $s(t) = t^2 + 4$;

б) $s(t) = t^2 - t$; г) $s(t) = t^2 - 2t$.

27.12. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (см. рис. 39). Укажите любые два значения аргумента x_1 и x_2, при которых:

а) $f'(x_1) > 0$; $f'(x_2) > 0$; в) $f'(x_1) < 0$; $f'(x_2) < 0$;

б) $f'(x_1) < 0$; $f'(x_2) > 0$; г) $f'(x_1) > 0$; $f'(x_2) < 0$.

○27.13. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (см. рис. 39). Сравните значения производной в указанных точках:

а) $f'(-7)$ и $f'(-2)$; в) $f'(-9)$ и $f'(0)$;

б) $f'(-4)$ и $f'(2)$; г) $f'(-1)$ и $f'(5)$.

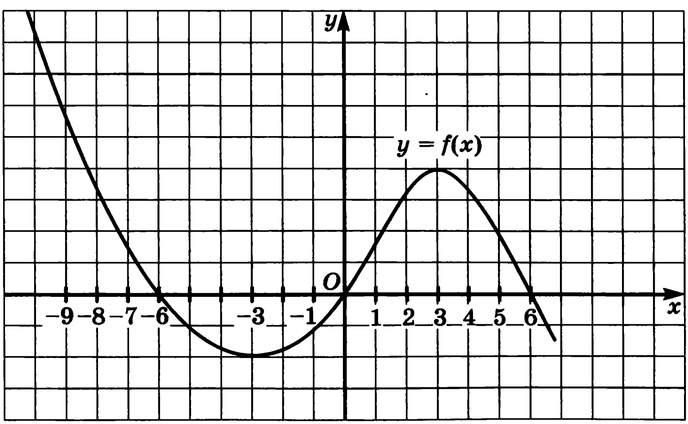

Рис. 39

27.14. Функция $y = \varphi(x)$ задана своим графиком (см. рис. 40). Укажите несколько значений аргумента, для которых:

а) $\varphi'(x) > 0$;

б) $\varphi'(x) < 0$ и $x > 0$;

в) $\varphi'(x) < 0$;

г) $\varphi'(x) > 0$ и $x < 0$.

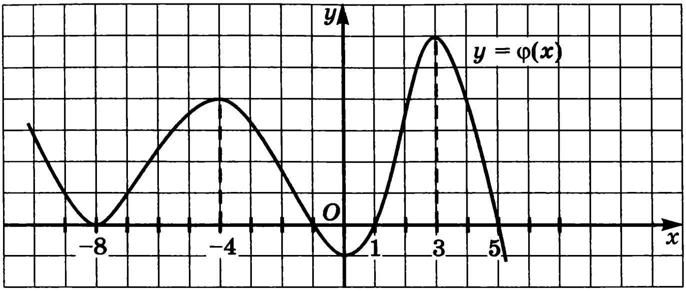

Рис. 40

§ 28. Вычисление производных

Найдите производную функции:

28.1. а) $y = 7x + 4$;

б) $y = x^2$;

в) $y = -6x + 1$;

г) $y = \frac{1}{x}$.

28.2. а) $y = \sin x$; б) $y = \sqrt{x}$; в) $y = \cos x$; г) $y = 10^{10}$.

Найдите значение производной функции $y = g(x)$ в точке x_0, если:

28.3. а) $g(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$;

б) $g(x) = x^2$, $x_0 = -7$;

в) $g(x) = -3x - 11$, $x_0 = -3$;

г) $g(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 0{,}5$.

28.4. а) $g(x) = \sin x$, $x_0 = -\frac{\pi}{2}$;

б) $g(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$;

в) $g(x) = \cos x$, $x_0 = -3\pi$;

г) $g(x) = \sin x$, $x_0 = 0$.

28.5. Найдите скорость изменения функции $y = h(x)$ в точке x_0, если:

а) $h(x) = 7x - 19$, $x_0 = -2$;

б) $h(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 16$;

в) $h(x) = -6x + 4$, $x_0 = 0{,}5$;

г) $h(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 9$.

28.6. Найдите скорость изменения функции $y = h(x)$ в точке x_0, если:

а) $h(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = -2$;

б) $h(x) = \sin x$, $x_0 = -\frac{\pi}{2}$;

в) $h(x) = x^2$, $x_0 = -0{,}1$;

г) $h(x) = \cos x$, $x_0 = \pi$.

Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

28.7. а) $f(x) = x^2$, $x_0 = -4$;

б) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = -\frac{1}{3}$;

в) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = \frac{1}{2}$;

г) $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$.

28.8. а) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$;

б) $f(x) = \cos x$, $x_0 = -\frac{\pi}{4}$;

в) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$;

г) $f(x) = \sin x$, $x_0 = -\frac{\pi}{6}$.

28.9. Укажите, какой формулой можно задать функцию $y = f(x)$, если:

а) $f'(x) = 2x$; б) $f'(x) = \cos x$; в) $f'(x) = 3$; г) $f'(x) = -\sin x$.

Найдите производную функции:

28.10. а) $y = x^2 - 7x$;

б) $y = \sqrt{x} - 9x^2$;

в) $y = 7x^2 + 3x$;

г) $y = \sqrt{x} - 5x^2$.

28.11. а) $y = \frac{1}{x} + 4x$;

б) $y = -2\sqrt{x} - \frac{1}{x}$;

в) $y = \frac{1}{x} - 6x$;

г) $y = 8\sqrt{x} + \frac{1}{x}$.

28.12. а) $y = \sin x + 3$;

б) $y = 4\cos x$;

в) $y = \cos x - 6$;

г) $y = -2\sin x$.

28.13. а) $y = \cos x + 2x$;

б) $y = 3\sin x + \cos x$;

в) $y = \sin x - 3x$;

г) $y = 2\cos x + \sin x$.

28.14. а) $x = x^9$; б) $y = x^{10}$; в) $x = x^{39}$; г) $y = x^{201}$.

Найдите производную функции:

28.15. а) $y = x^3 + 2x^5$; в) $y = x^3 + 4x^{100}$;

б) $y = x^4 - x^9$; г) $y = x^4 - 7x^9$.

28.16. а) $y = (x^2 - 1)(x^4 + 2)$; в) $y = (x^2 + 3)(x^4 - 1)$;

б) $y = (x^3 + 1)\sqrt{x}$; г) $y = \sqrt{x}(x^4 + 2)$.

28.17. а) $y = \left(\frac{1}{x} + 1\right)(2x - 3)$; в) $y = \left(\frac{1}{x} + 8\right)(5x - 2)$;

б) $y = \sqrt{x}\cos x$; г) $y = \sqrt{x}\sin x$.

○**28.18.** а) $y = \frac{x^3}{2x + 4}$; в) $y = \frac{x^2}{3 - 4x}$;

б) $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$; г) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$.

28.19. а) $y = 3\sin x + \operatorname{ctg} x$; в) $y = \cos x + \operatorname{tg} x$;

б) $y = \operatorname{tg} x - \cos x$; г) $y = 6\operatorname{tg} x - \sin x$.

28.20. а) $y = x\operatorname{tg} x$; в) $y = x\operatorname{ctg} x$;

б) $y = \sin x \operatorname{tg} x$; г) $y = \cos x \operatorname{ctg} x$.

Найдите значение производной функции в точке x_0:

28.21. а) $y = x^2 + 2x - 1$, $x_0 = 0$;

б) $y = x^3 - 3x + 2$, $x_0 = -1$;

в) $y = x^2 + 3x - 4$, $x_0 = 1$;

г) $y = x^3 - 9x^2 + 7$, $x_0 = 2$.

28.22. а) $y = \frac{2}{x} - 1$, $x_0 = 4$; в) $y = \frac{8}{x} - 6$, $x_0 = 1$;

б) $y = \sqrt{x} + 4$, $x_0 = 9$; г) $y = \sqrt{x} + 5$, $x_0 = 4$.

○**28.23.** Вычислите скорость изменения функции $y = g(x)$ в точке x_0:

а) $g(x) = x^3 + 2x$, $x_0 = 2$;

б) $g(x) = (\sqrt{x} + 1)\sqrt{x}$, $x_0 = 1$;

в) $g(x) = x^2 + 4\sqrt{x} - 4x$, $x_0 = 4$;

г) $g(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{4}{x} - 2\right)$, $x_0 = -0{,}5$.

○28.24. Вычислите скорость изменения данной функции в данной точке x_0:

а) $y = 2\sin x - 4x,\ x_0 = \frac{\pi}{3}$;

б) $y = \frac{\operatorname{tg} x}{3},\ x_0 = -\frac{\pi}{3}$;

в) $y = -3\cos x + x,\ x_0 = -\frac{\pi}{6}$;

г) $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{5},\ x_0 = \frac{\pi}{3}$.

○28.25. Найдите тангенс угла между касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0 и осью x:

а) $h(x) = x^6 - 4x,\ x_0 = 1$;

б) $h(x) = \sqrt{x} - 3,\ x_0 = \frac{1}{4}$;

в) $h(x) = -x^5 - 2x^2 + 2,\ x_0 = -1$;

г) $h(x) = \frac{25}{x} + 2,\ x_0 = \frac{5}{4}$.

○28.26. а) $f(x) = x^2 \sin x,\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = ?$

б) $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \frac{x^2}{\pi} + x\sin\frac{\pi}{6},\ f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = ?$

в) $f(x) = x(1 + \cos x),\ f'(\pi) = ?$

г) $f(x) = \sqrt{3}\cos x - x\cos\frac{\pi}{6} + \frac{x^2}{\pi},\ f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = ?$

○28.27. а) При каких значениях x выполняется равенство $f'(x) = 2$, если известно, что $f(x) = 2\sqrt{x} - 5x + 3$?

б) При каких значениях x выполняется равенство $f'(x) = 1$, если известно, что $f(x) = 3x - \sqrt{x} + 13$?

28.28. Найдите производную функции:

а) $y = (4x - 9)^7$;

б) $y = \left(\frac{x}{3} + 2\right)^{12}$;

в) $y = (5x + 1)^9$;

г) $y = \left(\frac{x}{4} - 3\right)^{14}$.

Найдите производную функции:

28.29. а) $y = \sin(3x - 9)$; в) $y = \cos(9x - 10)$;

б) $y = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right)$; г) $y = \sin(5 - 3x)$.

28.30. а) $y = \sqrt{15 - 7x}$; в) $y = \sqrt{4 + 9x}$;

б) $y = \sqrt{42 + 0{,}5x}$; г) $y = \sqrt{50 - 0{,}2x}$.

○28.31. Найдите значение производной функции в точке x_0:

а) $y = (3x - 2)^7$, $x_0 = 3$;

б) $y = \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$, $x_0 = \frac{\pi}{12}$;

в) $y = \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$, $x_0 = \frac{\pi}{12}$;

г) $y = \sqrt{25 - 9x}$, $x_0 = 1$;

Вычислите скорость изменения функции в точке x_0:

○28.32. а) $y = (2x + 1)^5$, $x_0 = -1$; в) $y = \frac{4}{12x - 5}$, $x_0 = 2$;

б) $y = \sqrt{7x - 3}$, $x_0 = 1$; г) $y = \sqrt{11 - 5x}$, $x_0 = -1$.

○28.33. а) $y = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

б) $y = \operatorname{tg} 6x$, $x_0 = \frac{\pi}{24}$;

в) $y = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$;

г) $y = \operatorname{ctg}\frac{x}{3}$, $x_0 = \pi$.

○28.34. Найдите тангенс угла между касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0 и осью x:

а) $h(x) = (0{,}5x + 3)^7$, $x_0 = -4$;

б) $h(x) = \sqrt{16x + 21}$, $x_0 = \frac{1}{4}$;

в) $h(x) = \frac{18}{4x + 1}$, $x_0 = 0{,}5$;

г) $h(x) = \sqrt{6 - 2x}$, $x_0 = 1$.

○28.35. Определите абсциссы точек, в которых угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ равен k, если:

а) $f(x) = \sqrt{x} - x,\ k = 1;$

б) $f(x) = \sin x \cos x,\ k = -\frac{\sqrt{2}}{2};$

в) $f(x) = \sqrt{x} + 3x,\ k = 4;$

г) $f(x) = \cos^2 x,\ k = \frac{1}{2}.$

Решите неравенство $f'(x) < 0$, если:

○28.36. а) $f(x) = x^3 - x^4;$ б) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 6x.$

○28.37. а) $f(x) = \sin 2x;$ б) $f(x) = -4\cos x + 2x.$

Решите неравенство $g'(x) > 0$, если:

○28.38. а) $g(x) = x^3 + x^4;$ б) $g(x) = \frac{4}{2 - 5x}.$

○28.39. а) $g(x) = \cos^2 x - \sin^2 x;$ б) $g(x) = \sin^2 x.$

○28.40. Определите абсциссы точек, в которых касательная к графику функции $y = h(x)$ образует острый угол с положительным направлением оси x, если:

а) $h(x) = x^3 - 3x^2 + 1;$ в) $h(x) = x^3 - x^4 - 19;$

б) $h(x) = 4\sqrt{x} - x;$ г) $h(x) = \operatorname{tg} x - 4x.$

○28.41. Определите абсциссы точек, в которых касательная к графику функции $y = \varphi(x)$ образует тупой угол с положительным направлением оси x, если:

а) $\varphi(x) = \sin x + 3;$

б) $\varphi(x) = 0{,}2x^5 - 3\frac{1}{3}x^3 + 9x.$

○28.42. При каких значениях аргумента скорость изменения функции $y = f(x)$ равна скорости изменения функции $y = g(x)$:

а) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2,\ g(x) = 7{,}5x^2 - 16x;$

б) $f(x) = \sqrt{x},\ g(x) = \frac{-1}{x}$?

○28.43. При каких значениях аргумента скорость изменения функции $y = g(x)$ больше скорости изменения функции $y = h(x)$:

а) $g(x) = x^3 - 3x^2$, $h(x) = 1{,}5x^2 - 9$;

б) $g(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$, $h(x) = 6x - 12$;

в) $g(x) = \operatorname{tg} x$, $h(x) = 4x - 81$;

г) $g(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$, $h(x) = 3 - \sqrt{2}x$?

○28.44. Найдите значения аргумента, удовлетворяющие условию $f'(x) = g'(x)$, если:

а) $f(x) = \sin(2x - 3)$, $g(x) = \cos(2x - 3)$;

б) $f(x) = \frac{6}{5x - 9}$, $g(x) = \frac{3}{7 - 5x}$;

в) $f(x) = \sqrt{3x - 10}$, $g(x) = \sqrt{14 + 6x}$;

г) $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $g(x) = 2x + 15$.

○28.45. Определите абсциссы точек, в которых касательные к графику функции $y = h(x)$ образуют с положительным направлением оси абсцисс заданный угол α:

а) $h(x) = x^2 - 3x + 19$, $\alpha = 45°$;

б) $h(x) = \frac{4}{x + 2}$, $\alpha = 135°$;

в) $h(x) = 2\sqrt{2x - 4}$, $\alpha = 60°$;

г) $h(x) = \sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$, $\alpha = 0°$.

●28.46. а) При каких значениях параметра a касательные к графику функции $y = 4x^2 - |a|x$, проведенные в точках его пересечения с осью x, образуют между собой угол $60°$?

б) При каких значениях параметра a касательные к графику функции $y = x^2 + |a|x$, проведенные в точках его пересечения с осью x, образуют между собой угол $45°$?

§ 29. Уравнение касательной к графику функции

29.1. Определите знак углового коэффициента касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$, изображенному на заданном рисунке, в точках с абсциссами a, b, c:

а) рис. 41; б) рис. 42.

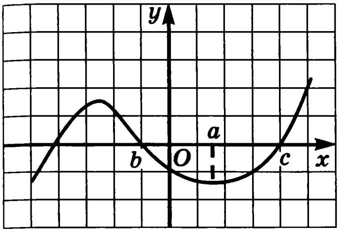

Рис. 41

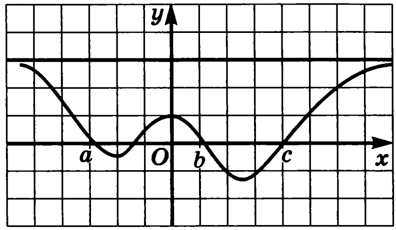

Рис. 42

29.2. Укажите точки, в которых производная равна нулю, и точки, в которых производная не существует, если график функции изображен на заданном рисунке:

а) рис. 43; б) рис. 44; в) рис. 45; г) рис. 46.

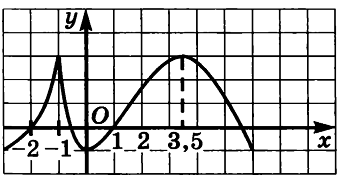

Рис. 43

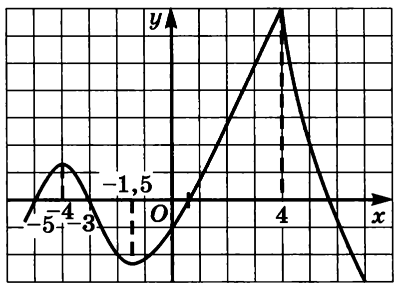

Рис. 44

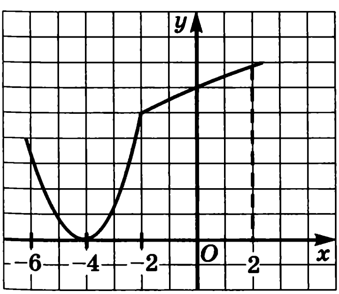

Рис. 45

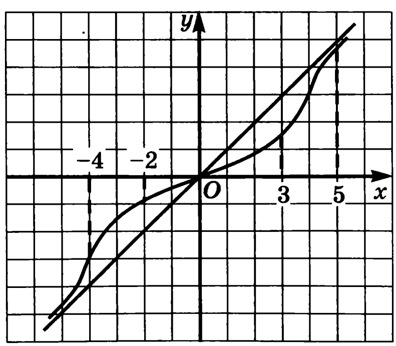

Рис. 46

29.3. Тупой или острый угол образует с положительным направлением оси x касательная к графику функции $y = f(x)$, проведенная в точке с абсциссой $x = a$, если:

а) $f(x) = 4 + x^2$, $a = 2$;

б) $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$, $a = 3$;

в) $f(x) = (1 - x)^3$, $a = -3$;

г) $f(x) = 2x - x^3$, $a = 1$?

29.4. Чему равен угловой коэффициент касательной к параболе $y = 1 - x^2$ в точке:

а) $A(0; 1)$;

б) $B(2; -3)$;

в) $B\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$;

г) $D(-1; 0)$?

Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$, если:

29.5. а) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$, $a = -1$;

б) $f(x) = \sqrt{4 - 5x}$, $a = 0$;

в) $f(x) = x^4 - 7x^3 + 12x - 45$, $a = 0$;

г) $f(x) = \sqrt{10 + x}$, $a = -5$.

29.6. а) $f(x) = \sin x$, $a = 0$;

б) $f(x) = \operatorname{tg} 2x$, $a = \frac{\pi}{8}$;

в) $f(x) = \cos 3x$, $a = \frac{\pi}{2}$;

г) $f(x) = \sin x$, $a = \frac{\pi}{3}$.

Определите, какой угол образует с осью x касательная, проведенная к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$, если:

29.7. а) $f(x) = x^2$, $a = 0{,}5$;

б) $f(x) = -3x^3$, $a = \frac{1}{3}$;

в) $f(x) = 0{,}2x^5$, $a = -1$;

г) $f(x) = -0{,}25x^4$, $a = 0$.

О29.8. а) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 7$, $a = 1$;

б) $f(x) = -7x^3 + 10x^2 + x - 12$, $a = 0$.

О29.9. а) $f(x) = \frac{2x - 1}{3 - 2x}$, $a = \frac{1}{2}$;

б) $f(x) = \frac{x - 1}{x - 2}$, $a = 1$.

Определите, какой угол образует с осью x касательная, проведенная к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$, если:

○29.10. а) $f(x) = \sqrt{6x + 7}$, $a = 3\frac{1}{3}$; б) $f(x) = \sqrt{5 - 2x}$, $a = 2$.

○29.11. а) $f(x) = \sqrt{3}\cos\frac{x}{3}$, $a = \frac{3\pi}{2}$; б) $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$, $a = \frac{\pi}{2}$.

Составьте уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$, если:

○29.12. а) $f(x) = x^2$, $a = 3$;

б) $f(x) = 2 - x - x^3$, $a = 0$;

в) $f(x) = x^3$, $a = 1$;

г) $f(x) = x^3 - 3x + 5$, $a = -1$.

○29.13. а) $f(x) = \frac{3x - 2}{3 - x}$, $a = 2$; б) $f(x) = \frac{2x - 5}{5 - x}$, $a = 4$.

○29.14. а) $f(x) = 2\sqrt{3x - 5}$, $a = 2$;

б) $f(x) = \sqrt{7 - 2x}$, $a = 3$.

○29.15. а) $f(x) = \cos\frac{x}{3}$, $a = 0$; б) $f(x) = \sin 2x$, $a = \frac{\pi}{4}$.

○29.16. а) $f(x) = \operatorname{ctg} 2x$, $a = \frac{\pi}{4}$; б) $f(x) = 2\operatorname{tg}\frac{x}{3}$, $a = 0$.

○24.17. Напишите уравнения касательных к графику функции $y = 9 - x^2$ в точках его пересечения с осью абсцисс.

○29.18. Напишите уравнения касательных к параболе $y = x^2 - 3x$ в точках с ординатой 4.

○29.19. На графике функции $y = x^3 - 3x^2 + x + 1$ найдите точки, в которых касательная образует с положительным направлением оси абсцисс угол 45°. Составьте уравнение каждой из этих касательных.

○29.20. В какой точке касательная к графику функции $y = x^2$ параллельна заданной прямой:

а) $y = 2x + 1$;

б) $y = -\frac{1}{2}x + 5$;

в) $y = \frac{3}{4}x - 2$;

г) $y = -x + 5$?

В каких точках касательная к графику заданной функции $y = f(x)$ параллельна заданной прямой $y = kx + m$:

○29.21. а) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 10x - 4$; $y = 3 + x$;

б) $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 + 8$, $y = 0$;

в) $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x - 7$, $y = x - 3$;

г) $f(x) = \frac{5}{4}x^4 - x^3 + 6$, $y = 2$?

○29.22. а) $f(x) = \sin x$, $y = -x$;

б) $f(x) = \cos 3x$, $y = 0$;

в) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $y = x$;

г) $f(x) = \sin \frac{x}{3}$, $y = -1$?

○29.23. Напишите уравнения тех касательных к графику функции $y = \frac{x^3}{3} - 2$, которые параллельны заданной прямой:

а) $y = x - 3$;

б) $y = 9x - 5$.

○29.24. С помощью формулы $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$ вычислите приближенно:

а) $0{,}998^5$; б) $\sqrt{1{,}05}$; в) $1{,}03^7$; г) $\sqrt{3{,}99}$.

●29.25. Через точку B проведите касательную к графику функции $y = f(x)$, если:

а) $f(x) = \sqrt{3 - x}$, $B(-2; 3)$;

б) $f(x) = \sqrt{3 - x}$, $B(4; 0)$.

●29.26. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = \frac{1}{x^2}$, $x < 0$, отсекающей от осей координат треугольник, площадь которого равна $\frac{9}{8}$.

●29.27. Составьте уравнения тех касательных к графику функции $y = \frac{\sqrt{3}}{6}(1 - x^2)$, которые пересекаются под углом $120°$ в точке, лежащей на оси y.

§ 30. Применение производной для исследования функций на монотонность и экстремумы

30.1. Определите, какой знак имеет производная функции $y = f(x)$ в точках с абсциссами a, b, c, d, если график функции изображен на рисунках:

а) рис. 47; б) рис. 48.

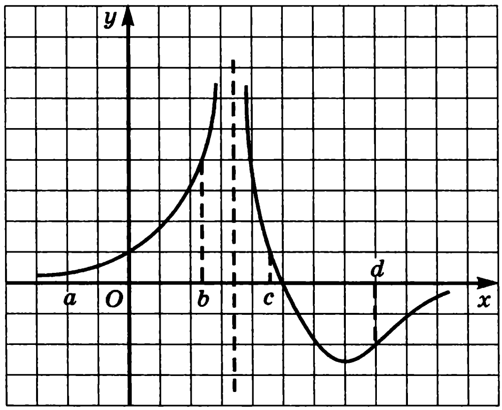

Рис. 47

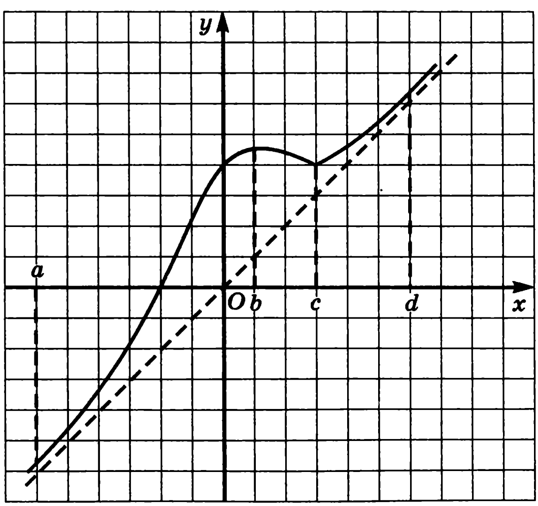

Рис. 48

30.2. Определите промежутки возрастания и убывания функции, график которой изображен на рисунках:

а) рис. 47; б) рис. 48.

30.3. По графику производной, изображенному на рисунках, определите, на каких промежутках функция $y = f(x)$ возрастает, а на каких — убывает:

а) рис. 49; в) рис. 51;

б) рис. 50; г) рис. 52.

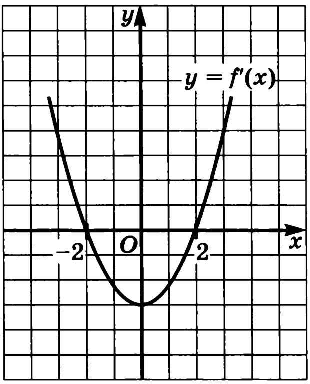

Рис. 49

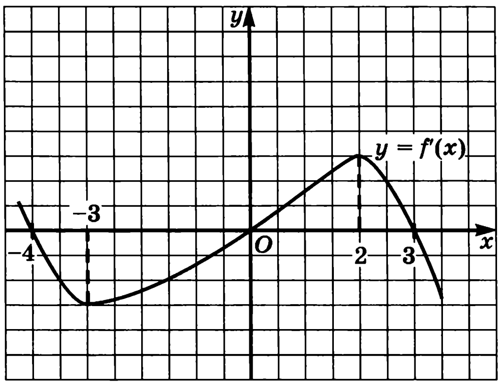

Рис. 50

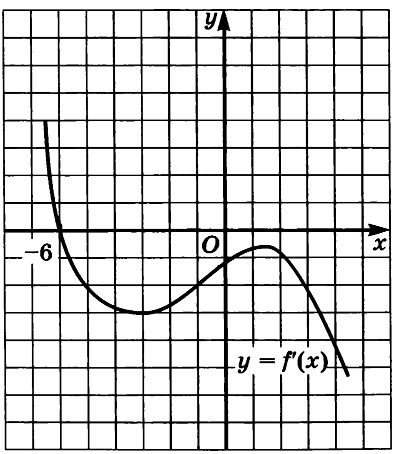

Рис. 51

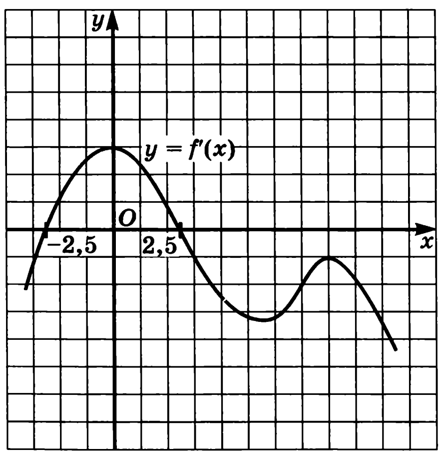

Рис. 52

30.4. На каком из указанных промежутков функция $y = f(x)$ убывает, если график ее производной представлен на рисунке 53:

а) $(-2;\ 1)$; б) $(-\infty;\ 4)$; в) $(4;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ -2)$?

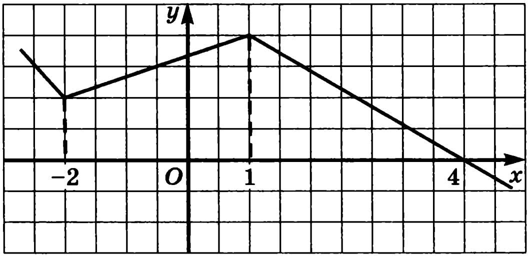

Рис. 53

30.5. Определите, для какой из функций $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = h(x)$ отрезок $[-1;\ 1]$ является промежутком возрастания, если на рисунках 54—56 изображены графики производных этих функций.

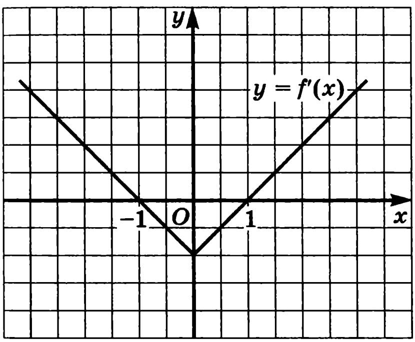

Рис. 54

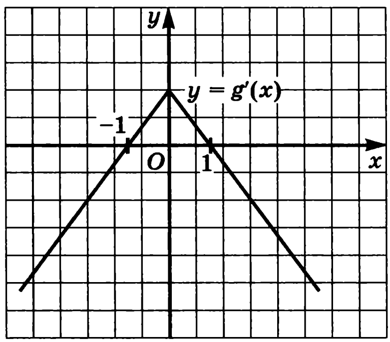

Рис. 55

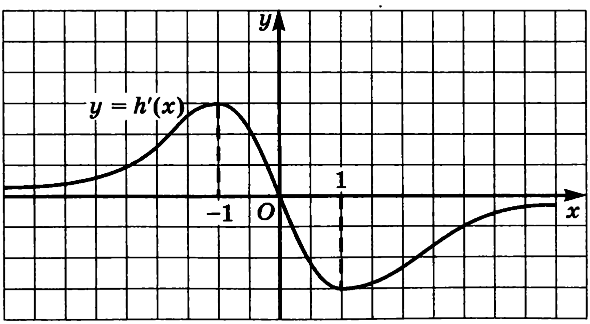

Рис. 56

30.6. На рисунках 57—59 изображены графики производных функций $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = h(x)$. Определите, какая из функций $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = h(x)$:

а) возрастает на $\boldsymbol{R}$; б) убывает на $\boldsymbol{R}$.

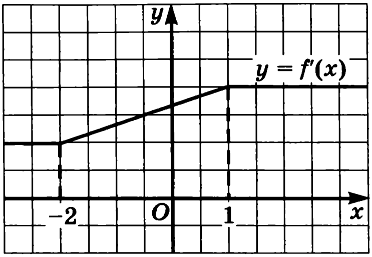

Рис. 57

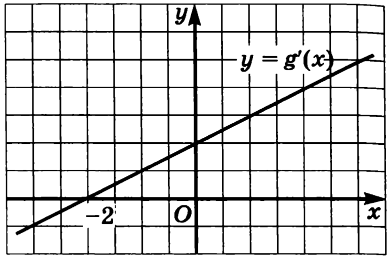

Рис. 58

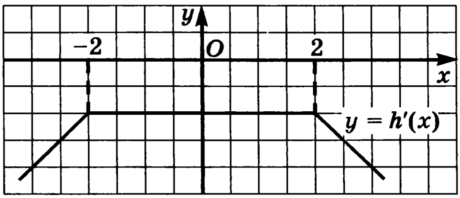

Рис. 59

30.7. Изобразите эскиз графика производной функции $y = f(x)$, если известно, что функция $y = f(x)$ возрастает на луче $(-\infty; 1]$ и убывает на луче $[1; +\infty)$.

30.8. Изобразите эскиз графика функции $y = f(x)$, если промежутки постоянства знака производной $f'(x)$ представлены на заданной схеме:

а) рис. 60; б) рис. 61; б) рис. 62; г) рис. 63.

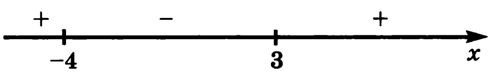

Рис. 60

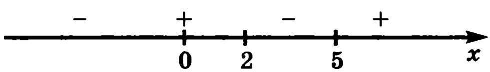

Рис. 61

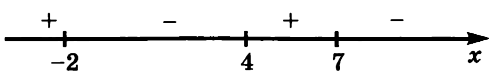

Рис. 62

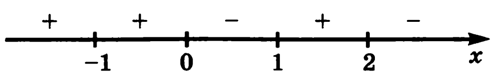

Рис. 63

○30.9. Докажите, что заданная функция возрастает:

а) $y = \cos x + 2x$; в) $y = \sin x + x^3 + x$;

б) $y = x^5 + 3x^3 + 7x + 4$; г) $y = x^5 + 4x^3 + 8x - 8$.

○30.10. Докажите, что заданная функция убывает:

а) $y = \sin 2x - 3x$; б) $y = \cos 3x - 4x$.

○30.11. Докажите, что функция монотонна на всей числовой прямой; укажите характер монотонности:

а) $y = x^5 + 6x^3 - 7$; в) $y = x - \cos x + 8$;

б) $y = \sin x - 2x - 15$; г) $y = 11 - 5x - x^3$.

Определите промежутки монотонности функции:

○30.12. а) $y = x^2 - 5x + 4$; в) $y = -x^2 + 8x - 7$;

б) $y = 5x^2 + 15x - 1$; г) $y = x^2 - x$.

○30.13. а) $y = x^3 + 2x$;

б) $y = 60 + 45x - 3x^2 - x^3$;

в) $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 40$;

г) $y = -x^5 + 5x$.

Исследуйте функцию на монотонность:

○30.14. а) $y = x^4 - 2x^2 - 3$; в) $y = -3x^4 + 4x^3 - 15$;

б) $y = -x^5 - x$; г) $y = 5x^5 - 1$.

○30.15. а) $y = \dfrac{1}{x + 3}$; в) $y = \dfrac{2}{x} + 1$;

б) $y = \dfrac{3x - 1}{3x + 1}$; г) $y = \dfrac{1 - 2x}{3 + 2x}$.

○30.16. а) $y = \sqrt{3x - 1}$; в) $y = \sqrt{1 - 2x}$;

б) $y = \sqrt{1 - x} + 2x$; г) $y = \sqrt{2x - 1} - x$.

30.17. По графику функции $y = f(x)$, изображенному на заданном рисунке, определите точки, в которых ее производная обращается в 0:

а) рис. 64; в) рис. 66;

б) рис. 65; г) рис. 67.

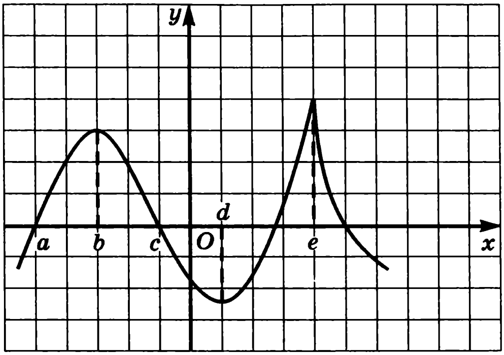

Рис. 64

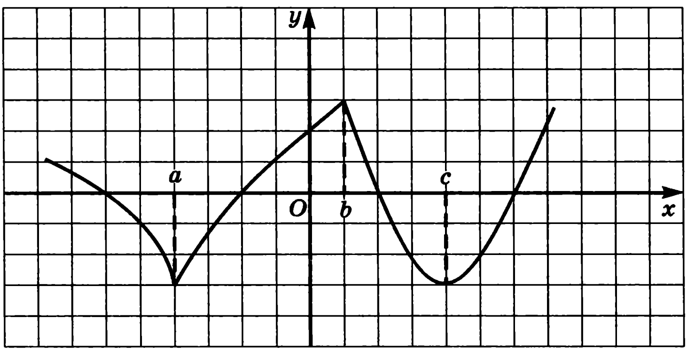

Рис. 65

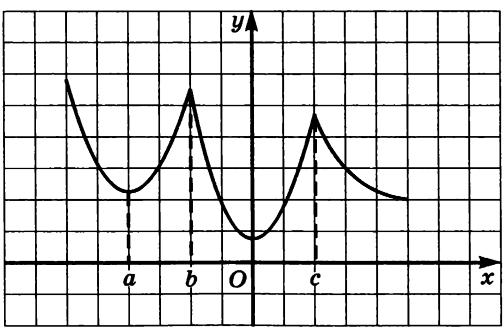

Рис. 66

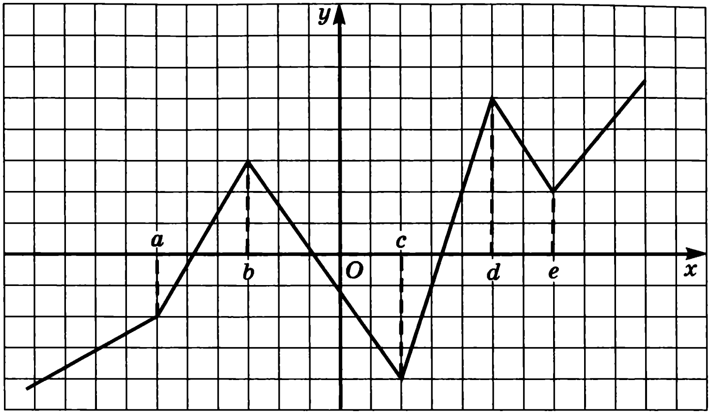

Рис. 67

30.18. По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке, определите точки, в которых $f'(x)$ не существует:

а) рис. 64; в) рис. 66;

б) рис. 65; г) рис. 67.

30.19. Сколько точек минимума имеет функция $y = f(x)$, график которой изображен на рисунке:

а) рис. 64; в) рис. 66;

б) рис. 65; г) рис. 67.

30.20. Сколько точек максимума имеет функция $y = f(x)$, график которой изображен на рисунке:

а) рис. 64; в) рис. 66;

б) рис. 65; г) рис. 67.

30.21. Используя данные о производной $f'(x)$, приведенные в таблице, укажите:

а) промежутки возрастания функции $y = f(x)$;

б) промежутки убывания функции $y = f(x)$;

в) точки максимума функции $y = f(x)$;

г) точки минимума функции $y = f(x)$.

x	$(-\infty; 5)$	-5	$(-5; -2)$	-2	$(-2; 8)$	8	$(8; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	+

30.22. а) Постройте эскиз графика функции, дифференцируемой на интервале $(a; b)$, имеющей на этом интервале одну точку минимума, две точки максимума и не имеющей наименьшего значения.

б) Постройте эскиз графика функции, дифференцируемой на интервале $(a; b)$, имеющей на нем две точки минимума, две точки максимума, но не имеющей ни наименьшего, ни наибольшего значений.

30.23. Может ли иметь только одну точку экстремума:

а) четная функция;

б) нечетная функция;

в) периодическая функция;

г) монотонная функция?

○30.24. При каких значениях параметра a заданная функция имеет одну стационарную точку:

а) $y = x^3 - 3ax^2 + 27x - 5$;

б) $y = x^3 - 3ax^2 + 75x - 10$?

30.25. По графику производной, изображенному на рисунке (см. с. 222—223), определите, имеет ли функция $y = f(x)$ точки экстремума:

а) рис. 49; в) рис. 51;

б) рис. 50; г) рис. 52.

Найдите точки экстремума заданной функции и определите их характер:

○30.26. а) $y = 7 + 12x - x^3$; в) $y = 3x^3 + 2x^2 - 7$;

б) $y = 8 + 2x^2 - x^4$; г) $y = x^4 - 8x^2$.

○30.27. а) $y = 2x + \dfrac{8}{x}$; в) $y = \dfrac{x}{5} + \dfrac{5}{x}$;

б) $y = \sqrt{2x - 1}$; г) $y = (x - 3)^4$.

○30.28. а) $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{5}{2}x^2 + 6x - 1$;

б) $y = x^3 - 27x + 26$;

в) $y = x^3 - 7x^2 - 5x + 11$;

г) $y = -2x^3 + 21x^2 + 19$.

○30.29. а) $y = -5x^5 + 3x^3$;

б) $y = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 13$;

в) $y = x^4 - 50x^2$;

г) $y = 2x^5 + 5x^4 - 10x^3 + 3$.

○30.30. а) $y = x + \frac{4}{x}$; б) $y = \frac{x^2 + 9}{x}$.

○30.31. а) $y = x - 2\sqrt{x - 2}$; б) $y = 4\sqrt{2x - 1} - x$.

○30.32. а) $y = x - 2\cos x$, $x \in [-\pi; \pi]$;

б) $y = 2\sin x - x$, $x \in [\pi; 3\pi]$.

§ 31. Построение графиков функций

Постройте эскиз графика какой-нибудь функции, обладающей указанными свойствами:

31.1. а) Функция имеет две точки максимума, одну точку минимума и является ограниченной;
б) функция возрастает при $x \leqslant 1$ и при $x \geqslant 5$ и убывает на промежутке $[1; 5]$; точка $x = 1$ является критической, а точка $x = 5$ — стационарной.

31.2. а) Функция имеет разрыв в точке $x = -2$, максимум в точке $x = -1$ и минимум в точке $x = 1$;
б) функция имеет горизонтальную асимптоту $y = 3$ при $x \to \infty$, одну точку максимума и одну точку минимума.

Исследуйте функцию и постройте ее график:

○31.3. а) $y = 3x^2 - 4x + 5$; в) $y = 7 - x - 2x^2$;

б) $y = 3 + 2x - x^2$; г) $y = 5x^2 - 15x - 4$.

○31.4. а) $y = 3x^2 - x^3$; в) $y = x^3 + 3x^2$;

б) $y = -9x + x^3$; г) $y = 3x - x^3$.

○31.5. а) $y = x^3 - 3x^2 + 2$; в) $y = -x^3 + 6x^2 - 5$;

б) $y = -x^3 + 3x - 2$; г) $y = x^3 - 3x + 2$.

Исследуйте функцию и постройте ее график:

○31.6. а) $y = 2x^3 + x^2 - 8x - 7$; в) $y = x^3 + x^2 - x - 1$;

б) $y = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x - \frac{11}{3}$; г) $y = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + \frac{5}{3}$.

Постройте график функции:

○31.7. а) $y = -x^4 + 5x^2 - 4$; в) $y = 2x^4 - 9x^2 + 7$;

б) $y = x^5 - 5x$; г) $y = 5x^3 - 3x^5$.

○31.8. а) $y = (x - 1)^2(x + 2)$; в) $y = (x + 2)^2(x - 3)$;

б) $y = \frac{256}{9}x(x - 1)^3$; г) $y = x^3(2 - x)$.

○31.9. а) $y = \frac{x + 2}{x - 3}$; в) $y = \frac{x - 3}{x + 1}$;

б) $y = \frac{3x - 4}{x - 2}$; г) $y = \frac{2x + 1}{x + 2}$.

○31.10. а) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$; б) $y = \frac{-2}{x^2 + 4}$.

●31.11. а) $y = \frac{2x + 1}{x^2 + 2}$; б) $y = \frac{x - 2}{x^2 + 5}$.

●31.12. а) $y = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$; б) $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

●31.13. а) Постройте график функции $y = x^4 - 2x^2 + 3$.

б) При каких значениях параметра a уравнение $x^4 - 2x^2 + 3 = a$ имеет три корня?

●31.14. а)Постройте график функции $y = -x^4 + 2x^2 + 8$.

б) При каких значениях параметра a уравнение $-x^4 + 2x^2 + 8 = a$ не имеет корней?

●31.15. При каких значениях параметра a:

а) уравнение $x^3 - 3x = a$ имеет один корень;

б) уравнение $3x - x^3 = a$ имеет два корня?

§ 32. Применение производной для нахождения наибольших и наименьших значений величин

Найдите наибольшее и наименьшее значения заданной функции на заданном отрезке:

32.1. а) $y = 3x - 6$, $[-1;\ 4]$;

б) $y = -\frac{8}{x}$, $\left[\frac{1}{4};\ 8\right]$;

в) $y = -0{,}5x + 4$, $[-2;\ 6]$;

г) $y = \frac{3}{x}$, $[0{,}3;\ 2]$.

32.2. а) $y = 2\sin x$, $\left[-\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$;

б) $y = -2\cos x$, $\left[-2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right]$;

в) $y = 6\cos x$, $\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right]$;

г) $y = -0{,}5\sin x$, $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

32.3. а) $y = \operatorname{tg} x$, $\left[-\frac{\pi}{3};\ -\frac{\pi}{6}\right]$;

б) $y = -3\operatorname{tg} x$, $\left[\pi;\ \frac{4\pi}{3}\right]$;

в) $y = -2\operatorname{tg} x$, $\left[0;\ \frac{\pi}{6}\right]$;

г) $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$, $\left[-\pi;\ -\frac{3\pi}{4}\right]$.

32.4. а) $y = \sqrt{x}$, $[0;\ 9]$;

б) $y = \sqrt{-x}$, $[-4;\ 0]$;

в) $y = -\sqrt{x}$, $[4;\ 16]$;

г) $y = -\sqrt{-x}$, $[-9;\ -4]$.

32.5. а) $y = 12x^4$, $[-1;\ 2]$;

б) $y = -6x^5$, $[0{,}1;\ 2]$;

в) $y = -3x^7$, $[0;\ 1]$;

г) $y = \frac{1}{9}x^4$, $[-1;\ 3]$.

○32.6. а) $y = x^2 - 8x + 19$, $[-1;\ 5]$;

б) $y = x^2 + 4x - 3$, $[0;\ 2]$;

в) $y = 2x^2 - 8x + 6$, $[-1;\ 4]$;

г) $y = -3x^2 + 6x - 10$, $[-2;\ 9]$.

32.7. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sin x$ на отрезке:

а) $\left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right]$; в) $\left[-2\pi; -\dfrac{4\pi}{3}\right]$;

б) $\left[2\pi; \dfrac{8\pi}{3}\right]$; г) $\left[6\pi; \dfrac{26\pi}{3}\right]$.

○32.8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 1$ на отрезке:

а) $[-1; 3]$; б) $[3; 6]$; в) $[-2; 3]$; г) $[3; 5]$.

○32.9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 + 3x^2 - 45x - 2$ на отрезке:

а) $[-6; 0]$; б) $[1; 2]$; в) $[-6; -1]$; г) $[0; 2]$.

○32.10. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$ на отрезке:

а) $[0; 2]$; б) $[3; 6]$; в) $[-1; 3]$; г) $[2; 7]$.

○32.11. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^4 - 8x^3 + 10x^2 + 1$ на отрезке:

а) $[-1; 2]$; б) $[1; 6]$; в) $[-2; 3]$; г) $[-1; 7]$.

○32.12. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x + \dfrac{4}{x-1}$ на отрезке:

а) $[2; 4]$; б) $[-2; 0]$.

○32.13. Найдите область значений функции:

а) $y = \operatorname{ctg} x + x,\ x \in \left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}\right]$;

б) $y = 2\sin x - x,\ x \in [0; \pi]$;

в) $y = 2\cos x + x,\ x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$;

г) $y = \operatorname{tg} x - x,\ x \in \left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$.

Найдите наибольшее и наименьшее значения заданной функции на заданном промежутке:

○32.14. а) $y = x^3 - 2x^2 + 1$, $[0,5;\ +\infty)$;

б) $y = x - 2\sqrt{x}$, $[0;\ +\infty)$;

в) $y = \frac{1}{5}x^5 - x^2$, $(-\infty;\ 1]$;

г) $y = \frac{x^4}{x^4 + 1}$, $(-\infty;\ +\infty)$.

○32.15. а) $y = x + \frac{1}{x}$, $(-\infty;\ 0)$;

б) $y = \frac{3x}{x^2 + 3}$, $[0;\ +\infty)$;

в) $y = -2x - \frac{1}{2x}$, $(0;\ +\infty)$;

г) $y = \sqrt{2x + 6} - x$, $[-3;\ +\infty)$.

●32.16. а) $y = x^2 - 4x + 5 + |1 - x|$, $[0;\ 4]$;

б) $y = |x^3 - 1| - 3x$, $[-1;\ 3]$.

Найдите область значений функции:

●32.17. а) $y = 2x - \sqrt{16x - 4}$, $x \in \left[\frac{1}{4};\ \frac{17}{4}\right]$;

б) $y = 2\sqrt{x - 1} - 0,5x$, $x \in [1;\ 10]$.

●32.18. а) $y = x\sqrt{x + 2}$; б) $y = x\sqrt{1 - 2x}$.

●32.19. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + \sqrt{16 - x^4} + \left|\sqrt{16 - x^4} - 5\right|$.

○32.20. Сумма двух целых чисел равна 24. Найдите эти числа, если известно, что их произведение принимает наибольшее значение.

○32.21. Произведение двух положительных чисел равна 484. Найдите эти числа, если известно, что их сумма принимает наибольшее значение.

○32.22. Разность двух чисел равна 98. Найдите эти числа, если известно, что их произведение принимает наименьшее значение.

○32.23. Представьте число 3 в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма утроенного первого слагаемого и куба второго слагаемого была наименьшей.

○32.24. Представьте число 5 в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы произведение первого слагаемого и куба второго слагаемого было наибольшим.

○32.25. Периметр прямоугольника составляет 56 см. Каковы его стороны, если этот прямоугольник имеет наибольшую площадь?

○32.26. Нужно огородить участок прямоугольной формы забором длиной 200 м. Каковы должны быть размеры этого прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

○32.27. Площадь прямоугольника составляет 16 см^2. Каковы должны быть его размеры, чтобы периметр прямоугольника был наименьшим?

○32.28. Огораживают спортивную площадку прямоугольной формы площадью 2500 м^2. Каковы должны быть ее размеры, чтобы на забор ушло наименьшее количество сетки «рабицы»?

●32.29. Сторона квадрата $ABCD$ равна 8 см. На сторонах AB и BC взяты соответственно точки P и E так, что $BP = BE = 3$ см. На сторонах AD и CD берутся точки соответственно K и M так, что четырехугольник $KPEM$ — трапеция. Чему равна наибольшая площадь такой трапеции?

●32.30. На графике функции $y = x^2$ найдите точку M, ближайшую к точке A (0; 1,5).

●32.31. На графике функции $y = \sqrt{x}$ найдите точку M, ближайшую к точке A (4,5; 0).

○32.32. Открытый металлический бак с квадратным основанием должен вмещать 32 л воды. При каких размерах на его изготовление уйдет наименьшее количество материала?

○32.33. Закрытый металлический бак с квадратным дном должен иметь объем 343 м^3. При каких размерах на его изготовление пойдет наименьшее количество материала?

○**32.34.** Для перевозки груза требуется изготовить закрытый короб в форме прямоугольного параллелепипеда, стороны основания которого относились бы как 2 : 3, а объем составлял 576 м^3. Каковы должны быть измерения параллелепипеда, чтобы его полная поверхность была наименьшей?

○**32.35.** Диагональ боковой грани правильной четырехугольной призмы равна d. При какой длине бокового ребра объем призмы будет наибольшим?

●**32.36.** Боковые стороны и одно из оснований трапеции равны 15 см. При какой длине второго основания площадь трапеции будет наибольшей?

●**32.37.** Из прямоугольной трапеции с основаниями a и b и высотой h вырезают прямоугольник наибольшей площади. Чему равна эта площадь, если:

а) $a = 80$, $b = 60$, $h = 100$;

б) $a = 24$, $b = 8$, $h = 12$?

●**32.38.** У пятиугольника $ABCDE$ углы A, B и E — прямые, $AB = a$, $BC = b$, $AE = c$, $DE = m$. Впишите в пятиугольник прямоугольник наибольшей площади и вычислите эту площадь, если:

а) $a = 7$, $b = 9$, $c = 3$, $m = 5$;

б) $a = 7$, $b = 18$, $c = 3$, $m = 1$.

●**32.39.** Памятник состоит из статуи и постамента. К памятнику подошел человек. Верхняя точка памятника находится выше уровня глаз человека на a м, а верхняя точка постамента — на b м. На каком расстоянии от памятника должен стать человек, чтобы видеть статую под наибольшим углом?

●**32.40.** База находится в лесу в 5 км от дороги, а в 13 км от базы на этой дороге есть железнодорожная станция. Пешеход по дороге идет со скоростью 5 км/ч, а по лесу — 3 км/ч. За какое минимальное время пешеход может добраться от базы до станции?

ГЛАВА 6

Степени и корни. Степенные функции

§ 33. Понятие корня n-й степени из действительного числа

33.1. Назовите подкоренное число и показатель корня:

а) $\sqrt[4]{3}$; б) $\sqrt[7]{5}$; в) $\sqrt{11}$; г) $\sqrt[15]{37}$.

33.2. Докажите, что верно равенство:

а) $\sqrt{361} = 19$; в) $\sqrt[3]{343} = 7$;

б) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{2}$; г) $\sqrt[5]{\frac{32}{243}} = \frac{2}{3}$.

33.3. Объясните, почему неверно равенство:

а) $\sqrt{25} = -5$; в) $-\sqrt[3]{-8} = -2$;

б) $\sqrt[6]{-64} = -2$; г) $\sqrt[4]{625} = -25$.

О33.4. Верно ли равенство:

а) $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$; в) $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 2$;

б) $\sqrt{14 - 6\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 3$; г) $\sqrt{15 - 6\sqrt{6}} = 3 - \sqrt{6}$?

Вычислите:

33.5. а) $\sqrt[4]{16}$; б) $\sqrt[5]{32}$; в) $\sqrt[4]{81}$; г) $\sqrt[3]{64}$.

33.6. а) $\sqrt[3]{0{,}125}$; б) $\sqrt[4]{0{,}0625}$; в) $\sqrt[4]{0{,}0081}$; г) $\sqrt[3]{0{,}027}$.

33.7. а) $\sqrt[4]{\frac{16}{625}}$; б) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$; в) $\sqrt{\frac{100}{121}}$; г) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$.

33.8. а) $\sqrt[7]{-128}$; б) $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$; в) $\sqrt[3]{-64}$; г) $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}}$.

33.9. Вычислите:

а) $\sqrt[5]{32} + \sqrt[3]{-8}$;

б) $\sqrt[4]{625} - \sqrt[3]{-125}$;

в) $3\sqrt[4]{16} - 4\sqrt[3]{27}$;

г) $12 - 6\sqrt[3]{0{,}125}$.

○33.10. Найдите отрезок $[n, n+1]$, где $n \in N$, которому принадлежит заданное число:

а) $\sqrt{5}$; б) $\sqrt[3]{19}$; в) $\sqrt[4]{52}$; г) $\sqrt[3]{63}$.

Решите уравнение:

33.11. а) $x^3 = 125$;

б) $x^7 = \frac{1}{128}$;

в) $x^5 = 32$;

г) $x^9 = 1$.

33.12. а) $x^4 = 17$;

б) $x^4 = -16$;

в) $x^6 = 11$;

г) $x^8 = -3$.

33.13. а) $0{,}02x^6 - 1{,}28 = 0$;

б) $-\frac{3}{4}x^8 + 18\frac{3}{4} = 0$;

в) $0{,}3x^9 - 2{,}4 = 0$;

г) $\frac{1}{8}x^4 - 2 = 0$.

33.14. а) $\sqrt[3]{x - 5} = -3$;

б) $\sqrt[4]{4 - 5x} = -2$;

в) $\sqrt[5]{2x + 8} = -1$;

г) $\sqrt[3]{7 - 4x} = 4$.

○33.15. а) $\sqrt[3]{x^2 - 9x - 19} = -3$;

б) $\sqrt[4]{x^2 - 10x + 25} = 2$;

в) $\sqrt[7]{2x^2 + 6x - 57} = -1$;

г) $\sqrt[6]{x^2 + 7x + 13} = 1$.

○33.16. Расположите числа в порядке возрастания:

а) $2, \sqrt[3]{5}, \sqrt[4]{17}$;

б) $\sqrt[3]{75}, 4, \sqrt[5]{100}$;

в) $3, \sqrt[5]{40}, \sqrt[3]{7}$;

г) $2, \sqrt[6]{60}, \sqrt[4]{20}$.

○33.17. Расположите числа в порядке убывания:

а) $-1, \sqrt[3]{-5}, \sqrt[4]{0{,}1}$;

б) $0, \sqrt[3]{-0{,}25}, \sqrt[5]{-29}$;

в) $-2, \sqrt[5]{-1{,}5}, \sqrt[3]{-9}$;

г) $1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{-2}$.

О33.18. Определите знак разности:

а) $\sqrt[3]{15} - \sqrt[4]{90}$;

б) $3 - \sqrt[7]{150}$;

в) $\sqrt[5]{40} - \sqrt[3]{50}$;

г) $\sqrt[4]{300} - 5$.

О33.19. Расположите числа в порядке возрастания:

а) $\frac{\pi}{2}$, $\sqrt[5]{-12}$, 2, $\sqrt[6]{70}$;

б) $\frac{3}{\pi}$, $\sqrt[7]{\pi}$, 1, $\sqrt[5]{-\pi}$;

в) $\sqrt{2\pi}$, $\frac{\pi}{3}$, $\sqrt[3]{-2}$, 2,5;

г) 2π, $\sqrt[5]{-0,5}$, 0, $\sqrt[3]{200}$.

§ 34. Функции $y = \sqrt[n]{x}$, их свойства и графики

Постройте график функции:

34.1. а) $y = \sqrt[3]{x}$; б) $y = \sqrt[6]{x}$; в) $y = \sqrt[4]{x}$; г) $y = \sqrt[5]{x}$.

34.2. а) $y = 2\sqrt[3]{x}$;

б) $y = -\frac{1}{3}\sqrt[6]{x}$;

в) $y = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{x}$;

г) $y = 3\sqrt[4]{x}$.

34.3. а) $y = \sqrt[4]{x+1}$;

б) $y = \sqrt[5]{x-2}$;

в) $y = \sqrt[7]{x+3}$;

г) $y = \sqrt[6]{x-4}$.

34.4. а) $y = \sqrt{x} + 2$;

б) $y = \sqrt[3]{x} - 4$;

в) $y = \sqrt[5]{x} + 1$;

г) $y = \sqrt[4]{x} - \frac{1}{2}$.

О34.5. а) $y = \sqrt{x+2} - 3$;

б) $y = \sqrt[3]{x-1} + 2$;

в) $y = \sqrt[4]{x-1} + 3$;

г) $y = \sqrt[5]{x+4} - 4$.

34.6. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sqrt[4]{x}$:

а) на отрезке [0; 1];

б) на полуинтервале [1; 3);

в) на отрезке [5; 16];

г) на луче [16; $+\infty$).

34.7. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sqrt[5]{x}$:

а) на отрезке [−1; 1];

б) на луче ($-\infty$; 1];

в) на отрезке [−32; 32];

г) на луче [2; $+\infty$).

О34.8. Найдите точки пересечения графиков функций:

а) $y = \sqrt[4]{x}$ и $y = x^2$;

б) $y = \sqrt[3]{x}$ и $y = |x|$;

в) $y = \sqrt[6]{x}$ и $y = x$;

г) $y = \sqrt[5]{x}$ и $y = -x - 2$.

О34.9. Решите графически уравнение:

а) $\sqrt{x} = -x$;

б) $\sqrt[3]{x} = 7 - 6x$;

в) $\sqrt[4]{x} = 2 - x$;

г) $\sqrt[5]{x} = -x^2$.

О34.10. Определите число решений системы уравнений:

а) $\begin{cases} y = \sqrt[4]{x}, \\ 2x - 3y = 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = \sqrt[3]{x}, \\ 3y - 4x = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y = \sqrt[5]{x}, \\ 6 - 2x - 3y = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} y = \sqrt[6]{x}, \\ 5 + x - 2y = 0. \end{cases}$

Постройте и прочитайте график функции:

О34.11. $y = \begin{cases} 2x^2, \text{ если } x < 0, \\ \sqrt[4]{x}, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$

О34.12. $y = \begin{cases} \dfrac{3}{x}, \text{ если } x < 0, \\ \sqrt[3]{x}, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$

О34.13. $y = \begin{cases} \sqrt[5]{x}, \text{ если } x < 0, \\ \sqrt{x}, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$

Найдите область определения функции:

34.14. а) $y = \sqrt[4]{2x - 4}$;

б) $y = \sqrt[8]{2 - 3x}$;

в) $y = \sqrt[6]{3x - 9}$;

г) $y = \sqrt[12]{1 - 5x}$.

34.15. а) $y = \sqrt[3]{x^2 + 5}$;

б) $y = \sqrt[7]{x^3 - 1}$;

в) $y = \sqrt[9]{6x - 7}$;

г) $y = \sqrt[5]{2x + 1}$.

Найдите область определения функции:

О34.16. а) $y = \sqrt{5x+8} + \sqrt[4]{2x-4}$;

б) $y = \sqrt[6]{2x+1} - \sqrt[8]{5-10x}$;

в) $y = \sqrt[10]{3x-12} - \sqrt[4]{2x-1}$;

г) $y = \sqrt{8-16x} + \sqrt[12]{10x+20}$.

О34.17. а) $y = \sqrt{x^2+4x-12}$; в) $y = \sqrt{x^2-8x+12}$;

б) $y = \sqrt[12]{15-x^2+2x}$; г) $y = \sqrt[6]{4-x^2-3x}$.

О34.18. а) $y = \sqrt[4]{\dfrac{x-8}{3x+5}}$; в) $y = \sqrt[3]{\dfrac{12-5x}{7-2x}}$;

б) $y = \sqrt[5]{\dfrac{1+9x}{4+3x}}$; г) $y = \sqrt[6]{\dfrac{3-7x}{2x+9}}$.

Найдите область значений функции:

О34.19. а) $y = \sqrt[4]{x+1}$; в) $y = \sqrt[7]{x+3}$;

б) $y = \sqrt[5]{x-2}$; г) $y = \sqrt[6]{x-4}$.

О34.20. а) $y = 2 + \sqrt[4]{x}$; в) $y = \sqrt[6]{x} - 3$;

б) $y = \sqrt[5]{x} - 3$; г) $y = 2 + \sqrt[3]{x}$.

О34.21. Найдите наименьшее значение функции:

а) $y = \sqrt[4]{x^2-6x+8}$; б) $y = \sqrt[6]{x^2+6x+10}$.

●34.22. Постройте график функции:

а) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2-5x+4}{x-4}}$; б) $y = \sqrt[4]{\dfrac{x^2-x-6}{x-3}}$.

§ 35. Свойства корня *n*-й степени

35.1. Найдите значение числового выражения:

а) $\sqrt[3]{8 \cdot 27}$; в) $\sqrt[4]{625 \cdot 16}$;

б) $\sqrt[4]{16 \cdot 0{,}0001}$; г) $\sqrt[5]{0{,}00032 \cdot 243}$.

35.2. Найдите значение числового выражения:

а) $\sqrt[5]{243 \cdot \frac{1}{32}}$; б) $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$; в) $\sqrt[6]{64 \cdot \frac{1}{729}}$; г) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$.

35.3. а) $\sqrt[3]{24 \cdot 9}$; б) $\sqrt[5]{48 \cdot 162}$; в) $\sqrt[3]{75 \cdot 45}$; г) $\sqrt[4]{54 \cdot 24}$.

35.4. а) $\sqrt[4]{\frac{125}{0{,}2}}$; б) $\sqrt[4]{\frac{16}{0{,}0625}}$; в) $\sqrt[3]{\frac{27}{0{,}125}}$; г) $\sqrt[6]{\frac{16}{0{,}25}}$.

35.5. а) $\sqrt[3]{5^6 \cdot 2^9}$; б) $\sqrt[5]{0{,}2^{10} \cdot 10^{10}}$; в) $\sqrt[3]{0{,}2^3 \cdot 5^6}$; г) $\sqrt[6]{36^3 \cdot 2^6}$.

35.6. а) $\sqrt[4]{\frac{7^8}{3^4}}$; б) $\sqrt[3]{\frac{5^6}{3^9}}$; в) $\sqrt[4]{\frac{3^{12}}{2^8}}$; г) $\sqrt[5]{\frac{5^5}{13^{10}}}$.

Упростите выражение, считая, что все переменные принимают только положительные значения:

35.7. а) $\sqrt[4]{x^2}$; б) $\sqrt[6]{y^4}$; в) $\sqrt[10]{a^5}$; г) $\sqrt[24]{n^{16}}$.

35.8. а) $\sqrt[4]{b^8}$; б) $\sqrt{l^6}$; в) $\sqrt[5]{d^{15}}$; г) $\sqrt[3]{t^{12}}$.

35.9. а) $\sqrt{a^2b^4}$; б) $\sqrt[3]{a^3b^6}$; в) $\sqrt[4]{a^4b^8}$; г) $\sqrt[5]{a^5b^{15}}$.

35.10. а) $\sqrt{\frac{49a^4}{169b^2}}$; б) $\sqrt[4]{\frac{16a^4b^8}{c^{12}}}$; в) $\sqrt[3]{\frac{27a^6}{64b^3}}$; г) $\sqrt[5]{\frac{32a^{40}b^{10}}{243c^{15}}}$.

Вычислите:

35.11. а) $\sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[4]{4}$; в) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{5}$;

б) $\sqrt[3]{135} \cdot \sqrt[3]{25}$; г) $\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[5]{486}$.

35.12. а) $\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}$; б) $\frac{\sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{96}}$; в) $\frac{\sqrt[7]{256}}{\sqrt[7]{2}}$; г) $\frac{\sqrt[4]{1024}}{\sqrt[4]{4}}$.

35.13. а) $\sqrt[4]{32 \cdot 3} \cdot \sqrt[4]{8 \cdot 27}$; б) $\sqrt[5]{2^5 \cdot 7^2} \cdot \sqrt[5]{7^3}$.

35.14. Приведите радикалы к одинаковому показателю корня:

а) $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[6]{3}$; в) $\sqrt[4]{7}$ и $\sqrt[12]{8}$;

б) $\sqrt[4]{5}$ и $\sqrt[3]{9}$; г) $\sqrt[3]{3}$ и $\sqrt[5]{2}$.

35.15. Приведите радикалы к одинаковому показателю корня:

а) $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$ и $\sqrt[6]{7}$; в) $\sqrt{6}$, $\sqrt[4]{17}$ и $\sqrt[8]{40}$;

б) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$ и $\sqrt[4]{4}$; г) $\sqrt[5]{3}$, $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[15]{100}$.

○35.16. Сравните числа:

а) $\sqrt[4]{26}$ и $\sqrt{5}$; в) $\sqrt[3]{7}$ и $\sqrt[6]{47}$;

б) $\sqrt[3]{5}$ и $\sqrt{3}$; г) $-\sqrt[4]{4}$ и $-\sqrt[3]{3}$.

Преобразуйте заданное выражение к виду $\sqrt[n]{A}$:

35.17. а) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2}$; в) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}$;

б) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[6]{3}$; г) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[6]{3}$.

○35.18. а) $\sqrt[4]{3b^3} \cdot \sqrt{3b}$; в) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[6]{a^5}$;

б) $\sqrt{2a} \cdot \sqrt[6]{4a^5}$; г) $\sqrt[3]{y} \cdot \sqrt[6]{3y^3}$.

○35.19. а) $\sqrt[3]{ab} \cdot \sqrt[6]{4ab}$; в) $\sqrt[6]{5ab^2} \cdot \sqrt[3]{5a^3b^4}$;

б) $\sqrt[5]{a^4b^3} \cdot \sqrt[10]{a^5b^2}$; г) $\sqrt[8]{6xz} \cdot \sqrt[6]{xz^5}$.

○35.20. а) $\sqrt[4]{a^3} : \sqrt{a}$; в) $\sqrt[6]{a^5} : \sqrt[4]{a}$;

б) $\sqrt[12]{a^2b^3} : \sqrt[6]{ab^4}$; г) $\sqrt[4]{a^3b^5} : \sqrt[5]{ab}$.

Возведите в степень:

35.21. а) $(\sqrt{3})^2$; б) $(\sqrt[n]{a})^n$; в) $(\sqrt[5]{7})^5$; г) $(\sqrt[p]{b})^p$.

35.22. а) $(2\sqrt{5})^4$; б) $\left(b \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{b}}\right)^{2n}$; в) $\left(3 \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{2}}\right)^5$; г) $\left(\frac{1}{b}\sqrt[p]{b}\right)^{2p}$.

35.23. а) $(\sqrt[3]{3a})^9$; б) $(5a \cdot \sqrt[3]{a})^2$; в) $(-5 \cdot \sqrt[3]{a^2})^2$; г) $(2\sqrt[3]{-3a^2})^5$.

35.24. Преобразуйте заданное выражение к виду $\sqrt[n]{A}$:

а) $\sqrt{\sqrt[3]{x}}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt{a^3}}$; в) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^{10}}}$; г) $\sqrt{\sqrt[3]{ab}}$.

O35.25. Решите уравнение:

а) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{5x} + 13 + \frac{\sqrt[3]{5x}}{5} = 2\sqrt[3]{5x}$;

б) $\sqrt[4]{2x} + \sqrt[4]{32x} + \sqrt[4]{162x} = 6$.

O35.26. Вычислите:

а) $\sqrt[4]{6 + 2\sqrt{5}} \cdot \sqrt[4]{6 - 2\sqrt{5}}$;

б) $\sqrt[5]{6 - 2\sqrt{17}} \cdot \sqrt[5]{6 + 2\sqrt{17}}$;

в) $\sqrt[3]{8 - \sqrt{37}} \cdot \sqrt[3]{8 + \sqrt{37}}$;

г) $\sqrt[3]{\sqrt{17} + 3} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{17} - 3}$.

O35.27. Решите уравнение:

а) $\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[6]{x} = 0$;

б) $\sqrt{x} - 5\sqrt[4]{x} + 6 = 0$;

в) $\sqrt[6]{x} + 2\sqrt[3]{x} - 1 = 0$;

г) $\sqrt[4]{x} + 2\sqrt[8]{x} - 3 = 0$.

O35.28. Докажите, что $2f(x) = f(128x)$, если $f(x) = \sqrt[7]{x}$.

O35.29. Докажите, что $2f(x) = f(32x)$, если $f(x) = 2\sqrt[5]{x}$.

O35.30. Постройте график функции:

а) $y = \sqrt[4]{(x - 2)^4}$;

б) $y = \sqrt[5]{(2 - x)^5}$;

в) $y = \sqrt[3]{(x + 1)^3}$;

г) $y = \sqrt[6]{(3 - x)^6}$.

§ 36. Преобразование выражений, содержащих радикалы

Вынесите множитель из-под знака корня:

36.1. а) $\sqrt{20}$; б) $\sqrt{147}$; в) $\sqrt{108}$; г) $\sqrt{245}$.

36.2. а) $\sqrt[3]{24}$; б) $\sqrt[4]{160}$; в) $\sqrt[3]{512}$; г) $\sqrt[4]{486}$.

Вынесите множитель из-под знака корня, считая, что переменные принимают только неотрицательные значения:

36.3. а) $\sqrt{x^3}$; б) $\sqrt[3]{a^4}$; в) $\sqrt[5]{m^7}$; г) $\sqrt[4]{n^{13}}$.

36.4. а) $\sqrt{25a^3}$; б) $\sqrt[4]{405a^5}$; в) $\sqrt[3]{24x^3}$; г) $\sqrt[5]{160m^{10}}$.

36.5. Вынесите множитель из-под знака корня, считая, что переменные принимают только неотрицательные значения:

а) $\sqrt{75t^4r^3}$; в) $\sqrt[3]{250x^4y^7}$;

б) $\frac{x^2}{b}\sqrt[3]{\frac{72a^1b^3}{343x^3}}$; г) $3mn\sqrt[4]{\frac{80x^3}{243m^5n^9}}$.

○**36.6.** Вынесите множитель из-под знака корня, считая, что переменные могут принимать как положительные, так и отрицательные значения:

а) $\sqrt{a^2b}$; б) $\sqrt[3]{a^3b}$; в) $\sqrt[4]{a^4b}$; г) $\sqrt{a^5b}$.

Внесите множитель под знак корня:

36.7. а) $2\sqrt{5}$; б) $6\sqrt[3]{1\frac{1}{9}}$; в) $5\sqrt{3}$; г) $3\sqrt[4]{2\frac{5}{27}}$.

36.8. а) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$; б) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{12}$; в) $1\frac{2}{5}\sqrt{3\frac{4}{7}}$; г) $0{,}2\sqrt[3]{25}$.

36.9. Внесите множитель под знак корня, считая, что переменные принимают только неотрицательные значения:

а) $7a^2\sqrt{ab}$; б) $5ab^2\sqrt[3]{a^2b}$; в) $5x\sqrt{2x}$; г) $2m\sqrt[3]{3m^2}$.

○**36.10.** Упростите выражение:

а) $\sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{3}$; в) $2\sqrt[5]{64} + \sqrt[5]{486}$;

б) $2\sqrt[7]{3} + \sqrt[7]{384}$; г) $\sqrt[4]{512} - \sqrt[4]{2}$.

○**36.11.** Расположите числа в порядке возрастания:

а) $\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{4}$ и $\sqrt[6]{18}$; в) $\sqrt[5]{3}$; $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[15]{30}$;

б) $\sqrt[5]{4}$; $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[15]{40}$; г) $\sqrt[4]{4}$; $\sqrt[6]{3}$ и $\sqrt[3]{2}$.

36.12. Выполните действия:

а) $(\sqrt[3]{m} - 2\sqrt[3]{n})(\sqrt[3]{m} + 2\sqrt[3]{n})$; в) $(a - \sqrt{b})(a + \sqrt{b})$;

б) $(\sqrt[3]{5} - \sqrt{3})(\sqrt{3} + \sqrt[3]{5})$; г) $(\sqrt[3]{4} + 2\sqrt{2})(2\sqrt{2} - \sqrt[3]{4})$.

Выполните действия:

36.13. а) $\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)\left(x - \sqrt{xy} + y\right)$;

б) $\left(3 + \sqrt[4]{a}\right)\left(9 - 3\sqrt[4]{a} + \sqrt{a}\right)$;

в) $\left(2\sqrt{p} + \sqrt{q}\right)\left(4p - 2\sqrt{pq} + q\right)$;

г) $\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[6]{ab} + \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{b}\right)$.

36.14. а) $\left(\sqrt[3]{m} - 2\sqrt[3]{n}\right)^2$; в) $\left(a^2 - \sqrt{a}\right)^2$;

б) $\left(\sqrt[3]{5} - \sqrt{3}\right)^2$; г) $\left(\sqrt[3]{4} + 2\sqrt{2}\right)^2$.

○36.15. а) $(a - b) : \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)$; в) $(m - n) : \left(\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{n}\right)$;

б) $(k + l) : \left(\sqrt[3]{k} + \sqrt[3]{l}\right)$; г) $(x - 4y) : \left(\sqrt{x} + 2\sqrt{y}\right)$.

Сократите дроби, считая, что переменные принимают неотрицательные значения.

○36.16. а) $\dfrac{\sqrt{10b} - \sqrt{15}}{\sqrt{15b} - \sqrt{5}}$; в) $\dfrac{\sqrt[4]{14} + \sqrt[4]{21k}}{\sqrt[4]{7k} - \sqrt[4]{14}}$;

б) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{xy}}$; г) $\dfrac{\sqrt[4]{a^2} - \sqrt[4]{ad}}{\sqrt[4]{3a} - \sqrt[4]{a^2d}}$.

○36.17. а) $\dfrac{\sqrt{a} - 2 \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[3]{b}}$; в) $\dfrac{\sqrt[4]{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + 2\sqrt[4]{a^2b} + b}$;

б) $\dfrac{\sqrt[3]{m} + 2\sqrt[3]{n}}{4\sqrt[3]{n^2} + 4\sqrt[3]{mn} + \sqrt[3]{m^2}}$; г) $\dfrac{\sqrt{b} + 2a\sqrt[4]{a^2b} + a^3}{a\sqrt{a} + \sqrt[4]{b}}$.

○36.18. а) $\dfrac{\sqrt{a} - \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[3]{b}}$; в) $\dfrac{\sqrt{b} - a^3}{a\sqrt{a} + \sqrt[4]{b}}$;

б) $\dfrac{\sqrt[5]{x^9} - 1}{\sqrt[5]{x^3} - 1}$; г) $\dfrac{\sqrt{a} - b\sqrt{b}}{\sqrt[6]{a} - \sqrt{b}}$.

○36.19. Преобразуйте заданное выражение к виду $\sqrt[n]{A}$:

а) $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2m^4n^8}}$; в) $\sqrt[5]{4\sqrt[3]{k^2l^5}}$;

б) $\sqrt{y\sqrt[5]{9x^4y^2}}$; г) $\sqrt[7]{q\sqrt[5]{2p^3q}}$.

О36.20. Преобразуйте заданное выражение к виду $\sqrt[n]{A}$:

а) $\sqrt[5]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$;

б) $\sqrt[4]{\frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{3}{4}\sqrt{\frac{4}{3}}}}$;

в) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}}}$;

г) $\sqrt{3\sqrt[4]{3\sqrt[3]{3}}}$.

О36.21. Упростите выражение:

а) $\sqrt{50} - \sqrt[3]{3} - 6\sqrt{2} + \sqrt[3]{24} + \sqrt{8}$;

б) $6\sqrt[4]{x} + \sqrt{xy} - \sqrt{9xy} - \sqrt[8]{x^2} + \frac{7}{x}\sqrt{x^3y}$.

О36.22. Сравните числа:

а) $-\sqrt[5]{2\sqrt[4]{10}}$ и $-\sqrt[4]{\sqrt[5]{99}}$;

б) $\sqrt{2\sqrt[3]{3}}$ и $\sqrt[3]{5}$;

в) $\sqrt[4]{3}$ и $\sqrt[8]{6\sqrt{2}}$;

г) $-\sqrt{2\sqrt[3]{6}}$ и $-\sqrt[3]{5\sqrt{2}}$.

О36.23. Расположите числа в порядке возрастания:

а) $\sqrt{3\sqrt[3]{4}}$, $\sqrt[3]{5\sqrt{3}}$ и $\sqrt[6]{100}$;

б) $\sqrt[5]{4}$, $\sqrt[6]{3\sqrt[5]{3}}$ и $\sqrt[10]{25}$;

в) $\sqrt[5]{3\sqrt{4}}$, $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[3]{2\cdot\sqrt[5]{2}}$;

г) $\sqrt[16]{64}$, $\sqrt[48]{7\sqrt{7}}$ и $\sqrt[4]{2\sqrt{1{,}25}}$.

О36.24. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{4 - 3\sqrt{2}}{(\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{8})^2}$;

б) $\dfrac{(\sqrt[3]{9} + \sqrt{3})^2}{\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[6]{3} + 1}$;

в) $\dfrac{(\sqrt[4]{24} + \sqrt[4]{6})^2}{4\sqrt{3} + 3\sqrt{6}}$;

г) $\dfrac{1 - 2\sqrt[4]{5} + \sqrt{5}}{(\sqrt{3} - \sqrt[4]{45})^2}$.

О36.25. Выполните действия:

а) $(1 + \sqrt{a})(1 + \sqrt[4]{a})(1 - \sqrt[4]{a})$;

б) $(\sqrt{m} + \sqrt{n})(\sqrt[4]{m} - \sqrt[4]{n})(\sqrt[4]{m} + \sqrt[4]{n})$.

○36.26. Выполните действия:

а) $\left(\sqrt[3]{9a^2x} - 2\sqrt[3]{3abx} + \sqrt[3]{b^2x}\right) : \left(\sqrt[3]{3a} - \sqrt[3]{b}\right)$;

б) $\left(\sqrt[3]{16x^2} - \sqrt[3]{25y^2}\right) : \left(\sqrt[3]{4x} - \sqrt[3]{5y}\right)$.

Разложите на множители:

○36.27. а) $\sqrt{2x} - \sqrt{3y} + \sqrt{2y} - \sqrt{3x}$;

б) $\sqrt[3]{4x^2} + \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{y^3} - \sqrt[4]{2y^3}$;

в) $\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{ab^3} - \sqrt[3]{a^3b} - \sqrt[3]{b^4}$;

г) $b\sqrt{a} - ab + \sqrt{ab} - ab\sqrt{b}$.

○36.28. а) $\sqrt[4]{m} - \sqrt[8]{m} - 6$;

б) $\sqrt{m} + 5\sqrt[4]{m} + 6$;

в) $\sqrt[5]{a} + 7\sqrt[10]{a} + 12$;

г) $2\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x} - 1$.

○36.29. Сократите дробь:

а) $\dfrac{6\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} - 1}{2\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}}$;

б) $\dfrac{3\sqrt{x} - 5\sqrt[4]{x} - 2}{9\sqrt{x} - 1}$.

○36.30. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sqrt{ab} \cdot \sqrt[4]{a}}{(a + b) \cdot \sqrt[4]{\dfrac{b^2}{a}}} - \dfrac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$;

б) $\dfrac{\left(\sqrt[4]{m} + \sqrt[4]{n}\right)^2 + \left(\sqrt[4]{m} - \sqrt[4]{n}\right)^2}{2(m - n)} : \dfrac{1}{\sqrt{m^3} - \sqrt{n^3}} - 3\sqrt{mn}$.

●36.31. Решите уравнение:

а) $\dfrac{x\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x^2} - 1} - \dfrac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt[3]{x} + 1} = 4$;

б) $\dfrac{x + 8}{\sqrt[3]{x} + 2} + \dfrac{\sqrt[3]{x^2} - 25}{\sqrt[3]{x} + 5} = 5$.

§ 37. Обобщение понятия о показателе степени

Представьте степень с дробным показателем в виде корня:

37.1. а) $c^{\frac{3}{4}}$; б) $p^{5\frac{1}{2}}$; в) $x^{\frac{3}{4}}$; г) $y^{2\frac{2}{3}}$.

37.2. а) $0{,}2^{0{,}5}$; б) $t^{0{,}8}$; в) $b^{1{,}5}$; г) $8{,}5^{0{,}6}$.

Представьте заданное выражение в виде степени с рациональным показателем:

37.3. а) $\sqrt{1{,}3}$; б) $\sqrt[7]{\frac{3}{5}}$; в) $\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$; г) $\sqrt[3]{4{,}3}$.

37.4. а) $\sqrt[5]{b^4}$; б) $\sqrt[3]{a^2}$; в) $\sqrt[11]{c^2}$; г) $\sqrt[5]{a}$.

Вычислите:

37.5. а) $49^{\frac{1}{2}}$; б) $1000^{\frac{1}{3}}$; в) $27^{\frac{1}{3}}$; г) $25^{\frac{1}{2}}$.

○37.6. а) $9^{2\frac{1}{2}}$; б) $0{,}16^{1\frac{1}{2}}$; в) $\left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{4}{3}}$; г) $0{,}001^{\frac{2}{3}}$.

37.7. Представьте выражение в виде степени и найдите его значение при заданном значении переменной:

а) $\frac{a^5 \cdot a^{-8}}{a^{-2}}$ при $a = 6$;

б) $\frac{b^{-9}}{\left(b^2\right)^{-3}}$ при $b = \frac{1}{2}$;

в) $\frac{p^{-9}}{p^{-2} \cdot p^{-5}}$ при $p = \frac{1}{2}$;

г) $\left(t^{-3}\right)^2 \cdot \frac{1}{t^{-5}}$ при $t = 0{,}1$.

Вычислите:

37.8. а) $\left(27 \cdot 3^{-4}\right)^2$; б) $16 \cdot \left(2^{-3}\right)^2$.

37.9. а) $\frac{6^{-4} \cdot 6^{-9}}{6^{-12}}$; б) $\frac{7^{-7} \cdot 7^{-8}}{7^{-13}}$.

○37.10. а) $\frac{5^4 \cdot 49^{-3}}{7^{-7} \cdot 25^3}$; б) $\frac{81^{12} \cdot 10^{-7}}{10^{-5} \cdot 27^{17}}$.

37.11. Представьте заданное выражение в виде степени с рациональным показателем:

а) $\sqrt{b^{-1}}$; б) $\sqrt[12]{b^{-5}}$; в) $\frac{1}{\sqrt[4]{x^{-3}}}$; г) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^{-2}}}$.

37.12. Вычислите:

а) $4^{-\frac{1}{2}}$; б) $8^{-\frac{1}{3}}$; в) $32^{-\frac{1}{5}}$; г) $16^{-\frac{1}{4}}$.

37.13. Имеет ли смысл выражение:

а) $5^{-\frac{4}{3}}$; б) $(-16)^{\frac{2}{3}}$; в) $23^{-\frac{3}{2}}$; г) $(-25)^{-\frac{1}{2}}$?

37.14. Сравните:

а) $2^{\frac{1}{2}}$ и $3^{\frac{1}{2}}$; в) $5^{\frac{1}{2}}$ и $5^{\frac{1}{3}}$;

б) $0{,}3^{\frac{1}{2}}$ и $0{,}5^{\frac{1}{2}}$; г) $7^{\frac{1}{3}}$ и $7^{\frac{2}{6}}$.

Упростите выражение:

37.15. а) $c^{\frac{1}{2}} \cdot c^{\frac{1}{3}}$; б) $b^{-\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{2}}$; в) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{-\frac{1}{6}}$; г) $d^5 \cdot d^{\frac{1}{2}}$.

37.16. а) $x^{\frac{1}{2}} : x^{\frac{3}{2}}$; б) $y^{-\frac{5}{6}} : y^{\frac{1}{3}}$; в) $z^{\frac{1}{5}} : z^{-\frac{1}{2}}$; г) $m^{\frac{1}{3}} : m^2$.

37.17. а) $\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$; б) $\left(c^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$; в) $\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{4}{3}}$; г) $\left(p^{-\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{2}{9}}$.

37.18. а) $x^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{x}$; б) $y^{\frac{7}{3}} \cdot \sqrt[3]{y^2}$; в) $z^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[4]{z}$; г) $\sqrt[4]{c^3} \cdot c^{\frac{1}{4}}$.

○**37.19.** а) $\left(a^{0,4}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot a^{0,8}$; в) $\left(x^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{5}{4}} \cdot \left(\sqrt[4]{x}\right)^{\frac{17}{4}}$;

б) $\sqrt[10]{c} \cdot \left(c^{-1,2}\right)^{\frac{3}{4}}$; г) $\left(b^{0,8}\right)^{-\frac{3}{4}} \cdot \left(b^{-\frac{2}{5}}\right)^{-1,5}$.

Найдите значение выражения:

○**37.20.** а) $10^{\frac{2}{5}} \cdot 10^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{0,1}$; в) $49^{-\frac{2}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{12}} \cdot 7^{-\frac{3}{4}}$;

б) $2^{1,3} \cdot 2^{-0,7} \cdot 4^{0,7}$; г) $25^{0,3} \cdot 5^{1,4} \cdot 625^{0,25}$.

○**37.21.** а) $4^{0,6} \cdot 2^{0,2} : 2^{-0,6}$; в) $4^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{1\frac{2}{3}} : 4^{-\frac{1}{3}}$;

б) $3 \cdot 9^{0,4} : \sqrt[5]{3^{-1}}$; г) $8^{-\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{1}{3}} : \sqrt[3]{2}$.

○**37.22.** а) $(27 \cdot 64)^{\frac{1}{3}}$; в) $\left(\frac{1}{36} \cdot 0{,}04\right)^{-\frac{1}{2}}$;

б) $\left(\frac{1}{16} \cdot 81^{-1}\right)^{-\frac{1}{4}}$; г) $\left(5^{-3} \cdot \frac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

○**37.23.** Упростите выражение:

а) $\left(m^{-3}\right)^{\frac{1}{3}}$; в) $\left(x^{-\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{2}{3}}$;

б) $\left(8x^{-1\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$; г) $\left(81x^{-4}\right)^{-\frac{3}{4}}$.

○37.24. Упростите выражение:

а) $\dfrac{x^{-\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{5}{3}}}{x^{\frac{3}{5}}}$;

б) $\dfrac{y^{\frac{6}{7}} \cdot \left(y^{-\frac{1}{2}}\right)^2}{\left(y^{\frac{4}{7}}\right)^{-2}}$;

в) $\dfrac{\left(c^{-\frac{2}{3}}\right)^{-4}}{c^{\frac{1}{6}} \cdot c^{\frac{1}{2}}}$;

г) $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{3}{5}}}{a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{2}{5}}}\right)^{20}$.

Представьте выражение в виде суммы:

37.25. а) $\left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right) \cdot x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$; в) $b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{4}}\left(b^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{3}{4}}\right)$;

б) $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)$; г) $x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{3}{2}}\right)$.

37.26. а) $\left(m^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{2}}\right)^2$; в) $\left(1 + b^{\frac{1}{2}}\right)^2$;

б) $\left(1 - c^{\frac{1}{3}}\right)^2$; г) $\left(a^{\frac{1}{2}} - 2b^{\frac{1}{2}}\right)^2$.

37.27. Раскройте скобки:

а) $\left(x^{\frac{1}{3}} + 3\right)\left(x^{\frac{1}{3}} - 3\right)$;

б) $\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a - a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b\right)$;

в) $\left(d^{\frac{1}{2}} - 1\right)\left(d^{\frac{1}{2}} + 1\right)$;

г) $\left(p^{\frac{1}{3}} - q^{\frac{1}{3}}\right)\left(p^{\frac{2}{3}} + (pq)^{\frac{1}{3}} + q^{\frac{2}{3}}\right)$.

Сократите дробь:

37.28. а) $\dfrac{4 \cdot 3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}} - 3}$; б) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a - b}$; в) $\dfrac{x + x^{\frac{1}{2}}}{2x}$; г) $\dfrac{p^{\frac{1}{2}} - 5}{p - 25}$;

○37.29. а) $\dfrac{c + c^{\frac{1}{2}}d^{\frac{1}{2}} + d}{c^{\frac{3}{2}} - d^{\frac{3}{2}}}$; б) $\dfrac{m + n}{m^{\frac{2}{3}} - m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{2}{3}}}$.

Упростите выражение:

○37.30. а) $\left(1 + c^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 2c^{\frac{1}{2}}$; в) $\left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$;

б) $\left(m^{\frac{1}{4}} - m^{\frac{1}{3}}\right)^2 + 2m^{\frac{7}{12}}$; г) $\sqrt{b} + \sqrt{c} - \left(b^{\frac{1}{4}} + c^{\frac{1}{4}}\right)^2$.

○37.31. а) $\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)^2 - \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)^2$;

б) $\left(a^{\frac{3}{2}} + 5a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 10a^2$.

○37.32. а) $\left(x^{\frac{1}{4}} + 1\right)\left(x^{\frac{1}{4}} - 1\right)\left(x^{\frac{1}{2}} + 1\right)$;

б) $\left(k^{\frac{1}{4}} + l^{\frac{1}{4}}\right)\left(k^{\frac{1}{8}} + l^{\frac{1}{8}}\right)\left(k^{\frac{1}{8}} - l^{\frac{1}{8}}\right)$.

○37.33. а) $\dfrac{a - b}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{a - b}$; б) $\dfrac{\sqrt{x}}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{\sqrt{y}}{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}$.

§ 38. Степенные функции, их свойства и графики

Постройте график функции:

38.1. а) $y = x^{10}$; б) $y = x^{-3}$; в) $y = x^5$; г) $y = x^{-4}$.

38.2. а) $y = x^{\frac{3}{2}}$; б) $y = x^{\frac{1}{4}}$; в) $y = x^{-\frac{1}{2}}$; г) $y = x^{\frac{5}{4}}$.

38.3. Постройте и сравните графики функций:

а) $y = \sqrt[3]{x}$ и $y = x^{\frac{1}{3}}$; б) $y = \sqrt[4]{x}$ и $y = x^{\frac{1}{4}}$.

38.4. Известно, что $f(x) = x^{\frac{5}{2}}$. Вычислите:

а) $f(4)$; б) $f\left(\dfrac{1}{9}\right)$; в) $f(0)$; г) $f(0{,}01)$.

38.5. Известно, что $f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$. Вычислите:

а) $f(1)$; б) $f(8)$; в) $f\left(\dfrac{1}{8}\right)$; г) $f(0)$.

38.6. Исследуйте степенную функцию на четность:

а) $y = x^{10}$; б) $y = x^{-\frac{1}{3}}$; в) $y = x^{-15}$; г) $y = x^{\frac{4}{3}}$.

38.7. Исследуйте степенную функцию на ограниченность:

а) $y = x^{8}$; б) $y = x^{-\frac{3}{4}}$; в) $y = x^{-5}$; г) $y = x^{\frac{2}{5}}$.

38.8. Исследуйте степенную функцию на монотонность:

а) $y = x^{12}$; б) $y = x^{-\frac{1}{6}}$; в) $y = x^{-11}$; г) $y = x^{\frac{1}{7}}$.

38.9. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y=x^{\frac{1}{4}}$:

а) на отрезке $[0; 1]$;
б) на луче $[1; +\infty)$;
в) на интервале $(2; 3)$;
г) на полуинтервале $(5; 16]$.

38.10. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y=x^{\frac{5}{2}}$:

а) на луче $[0; +\infty)$;
б) на полуинтервале $[1; 3)$;
в) на отрезке $[1; 2]$;
г) на полуинтервале $(6; 8]$.

38.11. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y=x^{-\frac{2}{3}}$:

а) на отрезке $[1; 8]$;
б) на интервале $(3; 5)$;
в) на луче $[1; +\infty)$;
г) на полуинтервале $(0; 1]$.

Постройте график функции:

38.12. а) $y = (x+2)^{\frac{1}{2}}$; б) $y = x^{\frac{7}{2}} - 3$; в) $y = (x-1)^{-\frac{2}{3}}$; г) $y = x^{-\frac{1}{3}} + 4$.

○38.13. а) $y=(x+3)^{\frac{1}{6}}-1$; б) $y=(x-2)^{-\frac{1}{9}}+5$; в) $y=(x+6)^{\frac{7}{4}}+2$; г) $y=(x-3)^{\frac{1}{2}}-1$.

○38.14. а) $y = 2x^{\frac{1}{3}}$; б) $y = -x^{-\frac{3}{5}}$; в) $y = \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$; г) $y = -2x^{\frac{1}{4}}$.

○38.15. Решите графически уравнение:

а) $x^{\frac{1}{2}} = 6 - x$; в) $x^{\frac{1}{4}} = x^3$;

б) $x^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{x^2}$; г) $x^{\frac{2}{3}} = x - 4$.

○38.16. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y = x^{\frac{5}{2}}, \\ y = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = x^{\frac{1}{6}}, \\ y = |x|; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = x^{-\frac{1}{3}}, \\ y = \sqrt{x}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y = x^{-\frac{2}{3}}, \\ 2x - y - 1 = 0. \end{cases}$

Постройте и прочитайте график функции:

○38.17. $y = \begin{cases} x, \text{ если } x < 0, \\ x^{\frac{5}{3}}, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$

○38.18. $y = \begin{cases} |x|, \text{ если } x < 1, \\ x^{\frac{1}{3}}, \text{ если } x \geqslant 1. \end{cases}$

○38.19. $y = \begin{cases} \frac{1}{x}, \text{ если } x < 0, \\ x^{-\frac{1}{2}}, \text{ если } x > 0. \end{cases}$

○38.20. Известно, что $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$. Найдите:

а) $f(16x)$; б) $f(81x^4)$; в) $f\left(\frac{1}{81}x\right)$; г) $f(x^{-8})$.

○38.21. Известно, что $f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$. Найдите:

а) $f(8x^3)$; б) $f(x^{-6})$; в) $f\left(\frac{1}{27}x\right)$; г) $f(x^{12})$.

Найдите производную заданной функции:

38.22. а) $y = x^8$; б) $y = x^{-4}$; в) $y = x^{40}$; г) $y = \frac{1}{x^6}$.

38.23. а) $y = x^{\frac{3}{5}}$; б) $y = \sqrt[4]{x^5}$; в) $y = x^{\frac{7}{2}}$; г) $y = \sqrt[5]{x}$.

Найдите производную заданной функции:

38.24. а) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; б) $y = \dfrac{1}{x^{\frac{3}{5}}}$; в) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$; г) $y = \dfrac{1}{x^{\frac{5}{3}}}$.

38.25. а) $y = x\sqrt{x}$; б) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x}}$; в) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}$; г) $y = x^2\sqrt[3]{x}$.

38.26. а) $y = 2x^4 + x\sqrt{x}$; в) $y = x^5 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

б) $y = \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} + 3x^6 - 1$; г) $y = x^3 - 7x\sqrt[5]{x}$.

О38.27. Найдите значение производной функции $y = g(x)$ в заданной точке x_0:

а) $g(x) = x^3 - 3\sqrt{x}$, $x_0 = 1$;

б) $g(x) = \sqrt[3]{3x - 1}$, $x_0 = \dfrac{2}{3}$;

в) $g(x) = x^{-1} + x^{-2}$, $x_0 = 1$;

г) $g(x) = \dfrac{1}{3}(5 - 2x)^{-3}$, $x_0 = 2$.

О38.28. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

а) $f(x) = 4 - x^{-\frac{3}{4}}$, $x_0 = 1$;

б) $f(x) = 12x^{-\frac{1}{2}} - x$, $x_0 = 9$;

в) $f(x) = 2x^{\frac{2}{3}} - 1$, $x_0 = 8$;

г) $f(x) = x^{-3} + 6\sqrt{x}$, $x_0 = 1$.

О38.29. Найдите угол, образованный касательной к графику функции $y = g(x)$ с положительным направлением оси абсцисс в точке с абсциссой x_0:

а) $g(x) = \dfrac{2}{3}\sqrt{4 - 3x}$, $x_0 = \dfrac{1}{3}$;

б) $g(x) = -3\left(\sqrt{2} + x\right)^{-\frac{1}{3}}$, $x_0 = 1 - \sqrt{2}$.

○38.30. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$:

а) $y = x^4 - 3x^3,\ \ a = 2;$

б) $y = \sqrt[3]{3x - 1},\ \ a = 3;$

в) $y = 3x^3 - 5x^2 - 4,\ \ a = 2;$

г) $y = (2x + 5)^{-\frac{1}{2}},\ \ a = 2.$

○38.31. Исследуйте функцию на монотонность и экстремумы:

а) $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2x;$

б) $y = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - x.$

○38.32. Найдите наименьшее и наибольшее значения заданной функции на заданном промежутке:

а) $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2x,\ [1;\ 9];$

б) $y = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - x,\ (0;\ 8);$

в) $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2x,\ (1;\ 9);$

г) $y = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - x,\ [0;\ 8].$

●38.33. Постройте график функции:

а) $y = 2(x - 1)^{\frac{2}{3}} - 2;$

б) $y = -\frac{1}{\sqrt[4]{x+4}} + 2;$

в) $y = -(x + 2)^{\frac{3}{2}} + 1;$

г) $y = 1{,}5(x - 3)^{-\frac{2}{7}} - 4.$

●38.34. Решите графически неравенство:

а) $x^{\frac{1}{2}} < 6 - x;$

б) $x^{\frac{3}{2}} \geqslant x^{-2};$

в) $x^{-\frac{1}{4}} \leqslant x^3;$

г) $x^{\frac{2}{3}} > x - 4.$

●**38.35.** Решите уравнение $g'(x) = 0$, если:

а) $g(x) = 2\sqrt{x} - x$;

б) $g(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{12}{5}x^{\frac{5}{4}} + 2x$;

в) $g(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - 2x$;

г) $g(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} - 2x$.

38.36. Проведите касательную к графику функции $y = f(x)$, параллельную заданной прямой $y = kx + m$:

а) $f(x) = 4\sqrt[4]{x}$, $y = x - 2$;

б) $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $y = 5 - 3x$.

●**38.37.** Исследуйте функцию на монотонность и экстремум и постройте ее график:

а) $y = \sqrt{x} - x$;

б) $y = x\sqrt{x + 2}$.

●**38.38.** Используя свойство монотонности функции, решите уравнение:

а) $2x^5 + x^3 + 5x - 80 = \sqrt[3]{14 - 3x}$;

б) $\sqrt[4]{10 + 3x} = 74 - x^5 - 3x^3 - 8x$.

●**38.39.** Проведите касательную к графику заданной функции из данной точки M:

а) $y = \sqrt{x}$, $M(0; 1)$;

б) $y = x^{\frac{3}{2}} + 4$, $M(0; 0)$.

ГЛАВА 7

Показательная и логарифмическая функции

§ 39. Показательная функция, ее свойства и график

Найдите значение выражения 2^x при указанных значениях переменной x:

39.1. а) $x = 3$; б) $x = -2$; в) $x = 5$; г) $x = -4$.

39.2. а) $x = \frac{3}{2}$; б) $x = -\frac{1}{2}$; в) $x = \frac{4}{3}$; г) $x = -\frac{2}{3}$.

39.3. Определите, какое из чисел, 5^{x_1} или 5^{x_2}, больше, если:

а) $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{4}{5}$; в) $x_1 = \frac{3}{5}$, $x_2 = \frac{4}{7}$;

б) $x_1 = -\frac{7}{3}$, $x_2 = -\frac{6}{5}$; г) $x_1 = -\frac{3}{8}$, $x_2 = -\frac{11}{9}$.

Найдите значение выражения:

39.4. а) $2^{5,3} \cdot 2^{-0,3}$; в) $3^{6,8} \cdot 3^{-5,8}$;

б) $7^{-\frac{1}{2}} \cdot 7^{3,5}$; г) $\left(\frac{3}{4}\right)^{3,7} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-0,7}$.

39.5. а) $4^{3,5} : 4^{3}$; в) $8^{2\frac{1}{3}} : 8^{2}$;

б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-6,3} : \left(\frac{1}{2}\right)^{-2,3}$; г) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2,4} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-0,6}$.

39.6. а) $\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{6}$; б) $\left(\left(\frac{1}{7}\right)^{2}\right)^{\frac{1}{2}}$; в) $\left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{2}$; г) $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{-1}$.

39.7. а) $(2^{-3})^{2} \cdot 2^{5}$; в) $(3^{2,7})^{3} : 3^{5,1}$;

б) $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{4,1}\right)^{5} : \left(\frac{2}{3}\right)^{20,6}$; г) $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\right)^{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{5}$.

Решите уравнение:

39.8. а) $3^x = 9$; в) $3^x = 27$;

б) $3^x = \frac{1}{3}$; г) $3^x = \frac{1}{81}$.

39.9. а) $5^x = \sqrt{5}$; в) $8^x = \sqrt[5]{8}$;

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81$; г) $\left(\frac{4}{5}\right)^x = \frac{16}{25}$.

○39.10. а) $2^{3x} = 128$; в) $3^{2x} = \frac{1}{27}$;

б) $6^{3x} = 216$; г) $\left(\frac{1}{7}\right)^{5x} = \frac{1}{343}$.

39.11. Среди заданных функций укажите те, которые являются показательными:

а) $y = 3^x$; б) $y = x^3$; в) $y = x^{\frac{5}{3}}$; г) $y = \left(\sqrt{3}\right)^x$.

○39.12. Найдите значение аргумента x, при котором функция $y = 2^x$ принимает заданное значение:

а) 16; б) $8\sqrt{2}$; в) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; г) $\frac{1}{32\sqrt{2}}$.

○39.13. Найдите значение аргумента x, при котором функция $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ принимает заданное значение:

а) $\frac{1}{25}$; б) 125; в) $\frac{1}{25\sqrt{5}}$; г) $625\sqrt{5}$.

39.14. Укажите, какие из заданных функций ограничены снизу:

а) $y = 4x - 1$; в) $y = -3x^2 + 8$;

б) $y = 18^x$; г) $y = \left(\frac{4}{11}\right)^x$.

39.15. Укажите, какие из заданных функций не ограничены сверху:

а) $y = -3x^2 + 1$; в) $y = (7,2)^x$;

б) $y = (0,6)^x$; г) $y = \cos x$.

39.16. Схематично изобразите график показательной функции:

а) $y = \left(\sqrt{2}\right)^x$; б) $y = \left(\frac{1}{\pi}\right)^x$; в) $y = \left(\sqrt{7}\right)^x$; г) $y = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^x$.

39.17. Сравните числа:

а) $1{,}3^{34}$ и $1{,}3^{40}$; в) $12{,}1^{\sqrt{3}}$ и $12{,}1^{\sqrt{5}}$;

б) $\left(\frac{7}{9}\right)^{16,2}$ и $\left(\frac{7}{9}\right)^{-3}$; г) $(0{,}65)^{-\sqrt{2}}$ и $(0{,}65)^{\frac{1}{2}}$.

39.18. Сравните с единицей заданное число:

а) $17^{-\frac{3}{4}}$; б) $(9{,}1)^{\sqrt{7}}$; в) $\left(\frac{5}{3}\right)^{-2,5}$; г) $\left(\frac{1}{2}\right)^8$.

○**39.19.** Расположите числа в порядке возрастания:

а) $2^{\frac{1}{3}}$, $2^{1,5}$, $2^{\sqrt{2}}$, $2^{-\sqrt{2}}$, $2^{1,4}$, 1;

б) $0{,}3^9$, 1, $0{,}3^{-\sqrt{5}}$, $0{,}3^{\frac{1}{2}}$, $0{,}3^{-9}$, $0{,}3^{\frac{1}{3}}$.

Исследуйте функцию на монотонность:

39.20. а) $y = \left(\sqrt{3}\right)^x$; в) $y = 21^x$;

б) $y = 0{,}3^x$; г) $y = \left(\frac{4}{\sqrt{19}}\right)^x$.

39.21. а) $y = 2^{-x}$; б) $y = \left(\frac{2}{9}\right)^{-x}$; в) $y = 17^{-x}$; г) $y = \left(\frac{1}{13}\right)^{-x}$.

Решите неравенство:

39.22. а) $4^x \leqslant 64$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{8}$; в) $5^x \geqslant 25$; г) $\left(\frac{2}{3}\right)^x < \frac{8}{27}$.

○**39.23.** а) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant 81$; в) $\left(\frac{2}{7}\right)^x \leqslant \frac{343}{8}$;

б) $15^x < \frac{1}{225}$; г) $2^x > \frac{1}{256}$.

Найдите наибольшее и наименьшее значения заданной функции на заданном промежутке:

39.24. а) $y = 2^x$, $[1; 4]$;

в) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $[0; 4]$;

б) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $[-4; -2]$;

г) $y = 2^x$, $[-4; 2]$.

39.25. а) $y = \left(\sqrt{2}\right)^x$, $(-\infty; 4]$;

в) $y = \left(\sqrt[3]{5}\right)^x$, $[0; +\infty)$;

б) $y = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$, $(-\infty; 2]$;

г) $y = \left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^x$, $[-2; +\infty)$.

○39.26. Найдите, на каком отрезке функция $y = 2^x$ принимает наибольшее значение, равное 32, и наименьшее, равное $\frac{1}{2}$.

○39.27. Найдите, на каком отрезке функция $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ принимает наибольшее значение, равное 81, и наименьшее, равное $\frac{1}{27}$.

39.28. Найдите область определения функции:

а) $y = 4^{x^2-1}$;

в) $y = \left(\frac{3}{8}\right)^{-x^2+2}$;

б) $y = 7^{\frac{1}{x}}$;

г) $y = 9{,}1^{\frac{1}{x-1}}$.

Постройте график функции:

39.29. а) $y = 2^x + 1$;

в) $y = 4^x - 1$;

б) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$;

г) $y = (0{,}1)^x + 2$.

39.30. а) $y = 5^{x+1}$;

в) $y = 3^{x-2}$;

б) $y = \left(\frac{3}{4}\right)^{x-2}$;

г) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+0{,}5}$.

○39.31. Решите графически уравнение:

а) $3^x = 4 - x$;

в) $5^x = 6 - x$;

б) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x + 3$;

г) $\left(\frac{1}{7}\right)^x = x + 8$.

○39.32. Решите графически уравнение:

а) $2^x = -2x + 8$; в) $3^x = -x + 1$;

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 11$; г) $0{,}2^x = x + 6$.

При каких значениях x график заданной показательной функции лежит выше графика заданной линейной функции:

○39.33. а) $y = 3^x$, $y = -x + 1$; в) $y = 5^x$, $y = -2x + 1$;

б) $y = 0{,}5^x$, $y = 2x + 1$; г) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = x + 1$?

○39.34. а) $y = 2^x$, $y = 3 - x$; в) $y = \left(\sqrt{2}\right)^x$, $y = 4 - x$;

б) $y = \left(\frac{2}{5}\right)^x$, $y = -x - 3$; г) $y = \left(\frac{3}{7}\right)^x$, $y = -x - 2$?

○39.35. При каких значениях x график заданной показательной функции лежит ниже графика заданной линейной функции:

а) $y = 2^x$, $y = -\frac{3}{2}x - 1$; в) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$, $y = 3x + 1$;

б) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = -x - 2$; г) $y = 3^x$, $y = -2x + 5$?

○39.36. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} 2^x, \text{ если } x \geqslant 0, \\ 3x + 1, \text{ если } x < 0. \end{cases}$

а) Вычислите $f(-3)$; $f(-2{,}5)$; $f(0)$; $f(2)$; $f(3{,}5)$;

б) постройте график функции $y = f(x)$;

в) прочитайте график функции.

○39.37. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} 4^x, \text{ если } x < 1, \\ -x^2 + 1, \text{ если } x \geqslant 1. \end{cases}$

а) Вычислите $f(-3)$; $f(-2{,}5)$; $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$;

б) постройте график функции $y = f(x)$;

в) прочитайте график функции.

○39.38. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x, \text{ если } x < 0, \\ \sqrt{x} + 1, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$

а) Вычислите $f(-5)$; $f(-2,5)$; $f(0)$; $f(4)$; $f(1,69)$;
б) постройте график функции $y = f(x)$;
в) прочитайте график функции.

○39.39. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^x, \text{ если } x \leqslant 0, \\ \cos x, \text{ если } x > 0. \end{cases}$

а) Вычислите $f(-3)$; $f(-2)$; $f(-1,5)$; $f(0)$; $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$; $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$;
б) постройте график функции $y = f(x)$;
в) прочитайте график функции.

Найдите область значений функции:

○39.40. а) $y = 3 \cdot 2^x$;
б) $y = 14 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$;
в) $y = \frac{1}{2} \cdot 7^x$;
г) $y = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

○39.41. а) $y = 3^x + 1$;
б) $y = \left(\frac{7}{9}\right)^x + 6$;
в) $y = 17^x - 2$;
г) $y = \left(\frac{2}{5}\right)^x - 8$.

○39.42. Докажите, что для функции $y = f(x)$, где $f(x) = 2^x$ выполняется равенство:

а) $f(x_1) \cdot f(x_2) = f(x_1 + x_2)$;
б) $f(x + 1) \cdot f(2x) = 2f^3(x)$;
в) $f(-2x) = \frac{1}{f^2(x)}$;
г) $f(\cos^2 x) = \sqrt{2f(\cos 2x)}$.

§ 40. Показательные уравнения и неравенства

40.1 Решите уравнение:

а) $3^x = 9$;
б) $2^x = 16$;
в) $\left(\frac{1}{9}\right)^x = 1$;
г) $0,5^x = 0,125$.

Решите уравнение:

40.2. а) $4^x = \frac{1}{16}$; в) $\left(\frac{1}{6}\right)^x = 36$;

б) $7^x = \frac{1}{343}$; г) $0{,}2^x = 0{,}00032$.

40.3. а) $10^x = \sqrt[4]{1000}$; в) $0{,}3^x = \sqrt[4]{0{,}0081}$;

б) $5^x = \frac{1}{\sqrt[3]{25}}$; г) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 25\sqrt{5}$.

40.4. а) $0{,}3^x = \frac{1000}{27}$; в) $0{,}7^x = \frac{1000}{343}$;

б) $\left(\frac{4}{5}\right)^x = \frac{25}{16}$; г) $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{16}{81}$.

40.5. а) $2^{x+1} = 4$; в) $0{,}4^{4-5x} = 0{,}16\sqrt{0{,}4}$;

б) $5^{3x-1} = 0{,}2$; г) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x} = 8\sqrt{2}$.

○40.6. а) $3^{-1-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+3}$; в) $\left(\frac{1}{6}\right)^{4x-7} = 6^{x-3}$;

б) $6^{2x-8} = 216^x$; г) $\left(\frac{2}{3}\right)^{8x+1} = 1{,}5^{2x-3}$.

○40.7. а) $3^{x^2-4{,}5} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{27}$; в) $\sqrt{2^{-1}} \cdot 2^{x^2-7{,}5} = \frac{1}{128}$;

б) $0{,}5^{x^2-5{,}5} \cdot \sqrt{0{,}5} = 32$; г) $0{,}1^{x^2-0{,}5} \cdot \sqrt{0{,}1} = 0{,}001$.

○40.8. а) $2^x\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{1}{9}$; в) $5^x \cdot 2^x = 0{,}1^{-3}$;

б) $\left(\frac{1}{5}\right)^x \cdot 3^x = \sqrt{\frac{27}{125}}$; г) $0{,}3^x \cdot 3^x = \sqrt[3]{0{,}81}$.

○40.9. а) $(\sqrt{12})^x \cdot (\sqrt{3})^x = \frac{1}{6}$; б) $(\sqrt[3]{3})^{2x} \cdot (\sqrt[3]{9})^{2x} = 243$.

Решите уравнение:

○40.10. а) $\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{3x^2-3} = 0{,}81^{-2x}$; б) $\left(\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{3}}\right)^{x^2+4} = 20{,}25^{x+1}$.

○40.11. а) $\sqrt{625} \cdot \sqrt{5^{14x-9}} = \sqrt[6]{125 \cdot 5^{6x-12}}$;

б) $\sqrt[3]{0{,}2} \cdot \sqrt{0{,}2^{2x-\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{0{,}04^{-3x+6}}$.

○40.12. а) $27^{\sqrt{x-1}} = \sqrt{9^{x+1}}$; в) $3^x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+1}} = 243$;

б) $2^{\sqrt{13-x^2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$; г) $\left(0{,}1^{\sqrt{x+1}}\right)^{\sqrt{x+6}} = \frac{1}{10^6}$.

○40.13. а) $3^x - 3^{x+3} = -78$; в) $2 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{3x+7} - 7 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{3x+8} = 49$;

б) $5^{2x-1} - 5^{2x-3} = 4{,}8$; г) $\left(\frac{1}{3}\right)^{5x-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{5x} = \frac{4}{9}$.

○40.14. а) $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$; в) $\left(\frac{1}{6}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^x - 6 = 0$;

б) $3^{2x} - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$; г) $\left(\frac{1}{6}\right)^{2x} + 5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^x - 6 = 0$.

○40.15. а) $2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$;

б) $3 \cdot 9^x - 10 \cdot 3^x + 3 = 0$;

в) $4\left(\frac{1}{16}\right)^x + 15 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x - 4 = 0$;

г) $(0{,}25)^x + 1{,}5 \cdot (0{,}5)^x - 1 = 0$.

○40.16. а) $4 \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^x - 17 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x + 4 = 0$;

б) $0{,}01^x + 9{,}9 \cdot (0{,}1)^x - 1 = 0$;

в) $3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x + 7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x - 6 = 0$;

г) $5 \cdot \left(\frac{4}{25}\right)^x + 23 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x - 10 = 0$.

Решите уравнение:

○**40.17.** а) $2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x - 88 = 0$;

б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} - 32 = 0$;

в) $5^{2x+1} - 26 \cdot 5^x + 5 = 0$;

г) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} - 162 = 0$.

●**40.18.** а) $3^{x-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{3-x} = \sqrt{\frac{1}{9^{4-x}}} + 207$;

б) $\sqrt[4]{16^{x+1}} + 188 = 8 \cdot 2^x - 0{,}5^{3-x}$.

○**40.19.** а) $2^x = 3^x$;

б) $25^x = 7^{2x}$;

в) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 8^x$;

г) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \left(\frac{1}{5}\right)^x$.

●**40.20.** а) $3^x \cdot 7^{x+2} = 49 \cdot 4^x$;

б) $2^{x+1} \cdot 5^{x+3} = 250 \cdot 9^x$.

○**40.21.** а) $6^{2x+4} = 2^{8+x} \cdot 3^{3x}$;

б) $35^{4x+2} = 5^{3x+4} \cdot 7^{5x}$.

○**40.22.** а) $2^{4x+2} \cdot 5^{-3x-1} = 6{,}25 \cdot 2^{x+1}$;

б) $3^{5x-1} \cdot 7^{2x-2} = 3^{3x+1}$.

○**40.23.** а) $3^x = -x - \frac{2}{3}$;

б) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4x + 6$;

в) $5^x = -x + 6$;

г) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 3x + 1$.

○**40.24.** а) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0{,}5x + 5$;

б) $3^x = -x + 4$;

в) $\left(\frac{1}{7}\right)^x = 2x + 9$;

г) $3^{\frac{x}{2}} = -0{,}5x + 4$.

●**40.25.** а) $18^x - 8 \cdot 6^x - 9 \cdot 2^x = 0$;

б) $12^x - 6^{x+1} + 8 \cdot 3^x = 0$.

Решите уравнение:

●40.26. а) $\frac{1}{3^x + 2} = \frac{1}{3^{x+1}}$;

б) $\frac{5}{12^x + 143} = \frac{5}{12^{x+2}}$;

в) $\frac{1}{5^x + 4} = \frac{1}{5^{x+1}}$;

г) $\frac{8}{11^x + 120} = \frac{8}{11^{x+2}}$.

●40.27. а) $3 \cdot 2^{2x} + 6^x - 2 \cdot 3^{2x} = 0$;

б) $2 \cdot 2^{2x} - 3 \cdot 10^x - 5 \cdot 5^{2x} = 0$;

в) $3^{2x+1} - 4 \cdot 21^x - 7 \cdot 7^{2x} = 0$;

г) $5 \cdot 3^{2x} + 7 \cdot 15^x - 6 \cdot 25^x = 0$.

Решите систему уравнений:

○40.28. а) $\begin{cases} 2^{x+y} = 16, \\ 3^y = 27^x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 0{,}5^{3x} \cdot 0{,}5^y = 0{,}5, \\ 2^{3x} \cdot 2^{-y} = 32; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5^{2x-y} = 125, \\ 4^{x-y} = 4; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 0{,}6^{x+y} \cdot 0{,}6^x = 0{,}6, \\ 10^x \cdot 10^y = (0{,}01)^{-1}. \end{cases}$

○40.29. а) $\begin{cases} (\sqrt{3})^{x+2y} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{27}, \\ 0{,}1^x \cdot 10^{3y} = 10; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 27^y \cdot 3^x = 1, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot 4^y = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (\sqrt{5})^{2x+y} = \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt{5}, \\ \left(\frac{1}{5}\right)^x \cdot 5^y = 125; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 5^y \cdot 25^x = 625, \\ \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot 9^y = \frac{1}{27}. \end{cases}$

Решите неравенство:

40.30. а) $2^x \geqslant 4$;

б) $2^x < \frac{1}{2}$;

в) $2^x \leqslant 8$;

г) $2^x > \frac{1}{16}$.

40.31. а) $3^x \leqslant 81$;

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{1}{27}$;

в) $5^x > 125$;

г) $(0{,}2)^x \leqslant 0{,}04$.

Решите неравенство:

40.32. а) $3^{2x-4} \leqslant 27$;

б) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x+6} > \frac{4}{9}$;

в) $5^{4x+2} \geqslant 125$;

г) $(0,1)^{5x-9} < 0,001$.

40.33. а) $7^{2x-9} > 7^{3x-6}$;

б) $0,5^{4x+3} \geqslant 0,5^{6x-1}$;

в) $9^{x-1} \leqslant 9^{-2x+8}$;

г) $\left(\frac{7}{11}\right)^{-3-0,5} < \left(\frac{7}{11}\right)^{x+1,5}$.

○**40.34.** а) $4^{5x-1} > 16^{3x+2}$;

б) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-3x+1} \geqslant \left(\frac{1}{49}\right)^{x+3}$;

в) $11^{-7x+1} \leqslant 121^{-2x-10}$;

г) $(0,09)^{5x-1} < 0,3^{x+7}$.

○**40.35.** а) $2^{3x+6} \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$;

б) $\left(\frac{7}{12}\right)^{-2x+3} > \left(\frac{12}{7}\right)^{3+2x}$;

в) $25^{-x+3} \geqslant \left(\frac{1}{5}\right)^{3x-1}$;

г) $\left(\frac{5}{3}\right)^{2x-8} < \left(\frac{9}{25}\right)^{-x+3}$.

○**40.36.** а) $2\sqrt{2} \cdot 2^{x-3} \geqslant \frac{1}{2}$;

б) $\sqrt[3]{125} \cdot \sqrt{5} \leqslant 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{2x-1}$;

в) $\left(\frac{1}{7}\right)^{3x+4} \cdot 7\sqrt{7} < \frac{1}{7}$;

г) $0,25 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{10-x} > 4\sqrt{64}$.

○**40.37.** а) $7^{x^2-5x} < \left(\frac{1}{7}\right)^{6}$;

б) $0,6^{x^2-x} \geqslant \left(\frac{3}{5}\right)^{6}$;

в) $11^{2x^2+3x} \leqslant 121$;

г) $0,3^{x^2-10x} > \left(3\frac{1}{3}\right)^{24}$.

○**40.38.** а) $\sqrt{2^{-1}} \cdot \sqrt{2^{x^2-7,5}} \geqslant 2^{-7}$;

б) $0,9^{x^2-4x} < \left(\frac{10}{9}\right)^{3}$;

в) $14^{x^2+x} \leqslant 196$;

г) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{3x^2-13x} > 9$.

○**40.39.** а) $2^{x} + 2^{x+2} \leqslant 20$;

б) $3^{2x-1} - 3^{2x-3} < \frac{8}{3}$;

в) $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x+4} + \left(\frac{1}{5}\right)^{3x+5} > 6$;

г) $0,3^{6x-1} - 0,3^{6x} \geqslant 0,7$.

Решите неравенство:

○40.40. а) $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 \leqslant 0$; в) $0{,}2^{2x} - 1{,}2 \cdot 0{,}2^x + 0{,}2 > 0$;

б) $5^{2x} + 4 \cdot 5^x - 5 \geqslant 0$; г) $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x} + 6 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^x - 7 < 0$.

○40.41. а) $2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x + 2 \geqslant 0$;

б) $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^x + 3 < 0$;

в) $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1} + 15 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x - 4 < 0$;

г) $(0{,}5)^{2x-1} + 3 \cdot (0{,}5)^x - 2 \geqslant 0$.

○40.42. а) $3^x < 5^x$; б) $6^x \geqslant 2^x$; в) $\left(\frac{12}{13}\right)^x \leqslant 12^x$; г) $0{,}6^x > 3^x$.

○40.43. а) $5^x \leqslant -x + 6$; в) $3x \geqslant -x + 4$.

б) $\left(\frac{1}{4}\right)^x > 3x + 1$; г) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 0{,}5x + 5$;

○40.44. а) $19^{\frac{2x-3}{x+2}} \geqslant 1$; в) $37^{\frac{5x-9}{x+6}} \leqslant 1$;

б) $0{,}36^{\frac{7x+1}{2-x}} < 1$; г) $\left(\frac{29}{30}\right)^{\frac{9x-18}{6-x}} > 1$.

○40.45. а) $3^{\frac{x-4}{x}-3} < \frac{1}{27}$; в) $8^{\frac{2-x}{x}-2} > \frac{1}{64}$;

б) $\left(\frac{8}{9}\right)^{\frac{6x-1}{x}-1} \geqslant \frac{81}{64}$; г) $\left(\frac{6}{11}\right)^{\frac{5x+1}{x}-1} \leqslant \frac{121}{36}$.

○40.46. а) $4^x \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^x \leqslant 2{,}25$; в) $5^x \cdot \left(\frac{2}{15}\right)^x \geqslant \frac{4}{9}$;

б) $9^x \cdot \left(\frac{1}{18}\right)^x > 0{,}25$; г) $3^x \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^x < 0{,}0625$.

○40.47. Сколько натуральных чисел являются решениями неравенства:

а) $\frac{1}{64} < 8^{-2x+3} < 512$; б) $\frac{1}{27} \leqslant \left(\frac{1}{9}\right)^{7-x} \leqslant 243$?

○40.48. Найдите наибольшее целочисленное решение неравенства:

а) $2{,}5^{2x+3} \leqslant 6{,}25$;
в) $1{,}1^{5x-3} < 1{,}21$;

б) $\left(\frac{2}{5}\right)^{7x-9} \geqslant \frac{8}{125}$;
г) $0{,}7^{9x+4} > 0{,}49$.

○40.49. Сколько целочисленных решений имеет неравенство:

а) $5^{x^2-2x} \leqslant 125$;
в) $2^{-x^2+8x} > 128$;

б) $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x^2-3x} \geqslant \frac{1}{49}$;
г) $(0{,}3)^{x^2-x} > 0{,}09$?

●40.50. Решить неравенство:

а) $2x + 2 - x^2 \geqslant 3^{x^2-2x+2}$;

б) $2^{x^2-4x+5} \geqslant 4x - 2 - x^2$.

§ 41. Понятие логарифма

Докажите, что:

41.1. а) $\log_2 2 = 1$; б) $\log_{\frac{1}{3}} 1 = 0$; в) $\log_{0,1} 0{,}1 = 1$; г) $\log_5 1 = 0$.

41.2. а) $\log_4 64 = 3$;
в) $\log_{0,2} 125 = -3$;

б) $\log_2 4\sqrt{2} = 2{,}5$;
г) $\lg 100\sqrt[5]{10} = 2{,}2$.

Вычислите:

41.3. а) $\log_2 2^4$; б) $\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-7}$; в) $\log_8 8^{-3}$; г) $\log_{0,1} (0{,}1)^5$.

41.4. а) $\log_3 \frac{1}{27}$;
в) $\lg 0{,}0001$;

б) $\log_{0,1} 0{,}0001$;
г) $\log_{\frac{1}{3}} 81$.

○41.5. а) $\log_{\sqrt{7}} 49$;
в) $\log_{\frac{1}{15}} \left(225\sqrt[3]{15}\right)$;

б) $\log_{\sqrt{2}} \left(2\sqrt{8}\right)$;
г) $\log_{\frac{3}{2}} \frac{64}{729}$.

○41.6. а) $\log_{\sqrt{2}} 1$; б) $\log_{0,5} \frac{1}{4\sqrt{2}}$; в) $\log_{\sqrt{3}} 81\sqrt{3}$; г) $\lg \frac{1}{\sqrt[3]{10}}$.

Вычислите:

41.7. а) $3^{\log_3 8}$; б) $4^{\log_4 23}$; в) $12^{\log_{12} 1{,}3}$; г) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{4}} 7}$.

○41.8. а) $2^{3+\log_2 9}$; б) $7^{1+\log_7 4}$; в) $\left(\frac{1}{6}\right)^{2+\log_{\frac{1}{6}} 20}$; г) $\left(\sqrt{7}\right)^{4+\log_{\sqrt{7}} 0{,}5}$.

○41.9. а) $8^{2\log_8 3}$; б) $6^{-3\log_6 2}$; в) $3^{4\log_3 2}$; г) $5^{-2\log_5 3}$.

Решите уравнение:

41.10. а) $\lg x = 1$; б) $\lg x = -2$; в) $\lg x = 3$; г) $\lg x = -4$.

41.11. а) $\log_9 x = \frac{1}{2}$; в) $\log_8 x = \frac{1}{3}$;

б) $\log_{0{,}027} x = \frac{2}{3}$; г) $\log_{0{,}25} x = \frac{3}{2}$.

41.12. а) $\log_4 x = -\frac{1}{2}$; в) $\log_{32} x = -\frac{4}{5}$;

б) $\log_{0{,}125} x = -\frac{2}{3}$; г) $\log_{0{,}01} x = -\frac{3}{2}$.

41.13. а) $\log_x 4 = 2$; в) $\log_x 49 = 2$;

б) $\log_x 27 = 3$; г) $\log_x 125 = 3$.

○41.14. а) $\log_x \frac{1}{27} = -3$; в) $\log_x \frac{1}{16} = -4$;

б) $\log_x 4 = -\frac{1}{2}$; г) $\log_x 8 = -\frac{1}{3}$.

41.15. а) $2^x = 9$; б) $12^x = 7$; в) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 4$; г) $(0{,}2)^x = 5$.

○41.16. а) $3^{x+1} = 14$; в) $\left(\frac{2}{7}\right)^{3-x} = 11$;

б) $4^{5x-4} = 10$; г) $\left(\sqrt{5}\right)^{8-9x} = 6$.

○41.17. а) $4^x - 5 \cdot 2^x = -6$; в) $9^x - 7 \cdot 3^x = -12$;

б) $16^x = 6 \cdot 4^x - 5$; г) $-9 \cdot 7^x + 14 = -49^x$.

Решите неравенство:

○41.18. а) $2^x \geqslant 9$; б) $12^x \leqslant 7$; в) $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 4$; г) $(0{,}2)^x > 5$.

●41.19. а) $4^x - 5 \cdot 2^x \geqslant -6$; в) $9^x - 7 \cdot 3^x < -12$;
б) $16^x \leqslant 6 \cdot 4^x - 5$; г) $9 \cdot 7^x + 14 > -49^x$.

§ 42. Функция $y = \log_a x$, ее свойства и график

42.1. Найдите значение логарифмической функции $y = \log_2 x$ в указанных точках:

а) $x_1 = 4$, $x_2 = 8$, $x_3 = 16$; в) $x_1 = \frac{1}{8}$, $x_2 = \frac{1}{32}$, $x_3 = \frac{1}{128}$;

б) $x_1 = \frac{2}{\sqrt{8}}$, $x_2 = \frac{4}{\sqrt{2}}$; г) $x_1 = \sqrt{32}$, $x_2 = 16\sqrt{128}$.

42.2. Постройте (схематично) график функции:

а) $y = \log_{\sqrt{3}} x$; в) $y = \lg x$;

б) $y = \log_{\frac{1}{\pi}} x$; г) $y = \log_{0{,}2} x$.

42.3. Сравните числа:

а) $\log_4 7$ и $\log_4 23$; в) $\log_9 \sqrt{15}$ и $\log_9 13$;

б) $\log_{\frac{2}{3}} 0{,}8$ и $\log_{\frac{2}{3}} 1$; г) $\log_{\frac{1}{12}} \frac{1}{7}$ и $\log_{\frac{1}{12}} \frac{2}{3}$.

42.4. Сравните с единицей число:

а) $\log_3 41$; б) $\log_{2{,}3} 0{,}1$; в) $\log_{\frac{1}{7}} 2{,}6$; г) $\log_{\sqrt{7}} 0{,}4$.

○42.5. Расположите числа в порядке возрастания:

а) $\log_2 0{,}7$; $\log_2 2{,}6$; $\log_2 0{,}1$; $\log_2 \frac{1}{6}$; $\log_2 3{,}7$;

б) $\log_{0{,}3} 17$; $\log_{0{,}3} 2{,}7$; $\log_{0{,}3} \frac{1}{2}$; $\log_{0{,}3} 3$; $\log_{0{,}3} \frac{2}{3}$.

○42.6. Сравните числа:

а) $\log_3 4$ и $\sqrt[3]{9}$; в) $\log_2 5$ и $\sqrt[3]{7}$;

б) $\log_{0{,}5} 3$ и $\sin 3$; г) $\lg 0{,}2$ и $\cos 0{,}2$.

42.7. Исследуйте функцию на монотонность:

а) $y = \log_{2,6} x$; в) $y = \log_{\sqrt{5}} x$;

б) $y = \log_{\frac{3}{4}} x$; г) $y = \log_{0,9} x$.

42.8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке $[a, b]$:

а) $y = \log_3 x$, $\left[\frac{1}{3}; 9\right]$; в) $y = \lg x$, $[1; 1000]$;

б) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $\left[\frac{1}{8}; 16\right]$; г) $y = \log_{\frac{2}{3}} x$, $\left[\frac{8}{27}; \frac{81}{16}\right]$.

○42.9. а) Найдите, на каком промежутке функция $y = \log_3 x$ принимает наибольшее значение, равное 4, и наименьшее, равное -2.

б) Найдите, на каком промежутке функция $y = \log_{0,5} x$ принимает наибольшее значение, равное -1, и наименьшее, равное -3.

○42.10. Найдите наибольшее значение функции:

а) $y = \log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 4)$; б) $y = \log_{0,3} (x^2 - 4x + 3)$.

○42.11. Решите уравнение:

а) $\log_3 x = 4 - x$; в) $\log_5 x = 6 - x$;

б) $\log_{\frac{1}{2}} x = x + \frac{1}{2}$; г) $\log_{\frac{1}{3}} x = x + \frac{2}{3}$.

Решите неравенство:

42.12. а) $\log_6 x \geqslant 2$; в) $\log_9 x \leqslant \frac{1}{2}$;

б) $\log_{0,1} x > 3$; г) $\log_{\frac{4}{5}} x < 3$.

42.13. а) $\log_9 x \leqslant -1$; в) $\log_5 x \geqslant -2$;

б) $\log_{\frac{1}{3}} x < -4$; г) $\log_{0,2} x > -3$.

Постройте график функции:

42.14. а) $y = 2 + \log_3 x$; в) $y = -3 + \log_4 x$;

б) $y = -1 + \log_{\frac{1}{3}} x$; г) $y = 0,5 + \log_{0,1} x$.

42.15. а) $y = 3 \log_4 x$; в) $y = 5 \log_8 x$;

б) $y = 2 \log_{\frac{1}{3}} x$; г) $y = \frac{1}{2} \log_{0,5} x$.

42.16. а) $y = -2\log_7 x$; в) $y = -0{,}5\log_2 x$;

б) $y = -4\log_{\frac{1}{6}} x$; г) $y = -\log_{\frac{2}{3}} x$.

42.17. а) $y = \log_2(x + 4)$; в) $y = \log_5(x - 1)$;

б) $y = \log_{\frac{1}{5}}(x - 3)$; г) $y = \log_{0,3}(x + 5)$.

42.18. Найдите область определения функции:

а) $y = \log_6(4x - 1)$; в) $y = \log_9(8x + 9)$;

б) $y = \log_{\frac{1}{9}}(7 - 2x)$; г) $y = \log_{0,3}(2 - 3x)$.

○42.19. Решите графически неравенство:

а) $\log_2 x \geqslant -x + 1$; в) $\log_9 x \leqslant -x + 1$;

б) $\log_{\frac{3}{7}} x > 4x - 4$; г) $\log_{\frac{1}{3}} x < 2x - 2$.

○42.20. Решите неравенство:

а) $\log_3 x \leqslant 4 - x$; в) $\log_5 x \geqslant 6 - x$;

б) $\log_{\frac{1}{2}} x < x + \frac{1}{2}$; г) $\log_{\frac{1}{3}} x > x + \frac{2}{3}$.

○42.21. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} -3x + 3, \text{ если } x \leqslant 1, \\ \log_{\frac{1}{3}} x, \text{ если } x > 1. \end{cases}$

а) Вычислите $f(-8)$, $f(-6)$, $f(0)$, $f(3)$, $f(9)$;

б) постройте график функции.

в) прочитайте график функции.

○42.22. Постройте и прочитайте график функции:

а) $y = \begin{cases} -4x + 4, \text{ если } x < 1, \\ \log_2 x, \text{ если } x \geqslant 1; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} -(x - 4)^2, \text{ если } x < 5, \\ \log_{0,2} x, \text{ если } x \geqslant 5; \end{cases}$

в) $y = \begin{cases} \log_2 x, \text{ если } 0 < x < 2, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x, \text{ если } x \geqslant 2; \end{cases}$

г) $y = \begin{cases} \frac{1}{x}, \text{ если } x < 0, \\ \log_{\sqrt{2}} x, \text{ если } x > 0. \end{cases}$

○42.23. Найдите область определения функции:

а) $y = \log_5 (x^2 - 5x + 6)$;

б) $y = \log_{\frac{2}{3}} (-x^2 - 5x + 14)$;

в) $y = \log_9 (x^2 - 13x + 12)$;

г) $y = \log_{0,2} (-x^2 + 8x + 9)$.

○42.24. Найдите область значений функции:

а) $y = \log_{\sqrt{3}} x$;

в) $y = -\log_{\frac{1}{10}} x$;

б) $y = -22 \log_7 x$;

г) $y = 12 \log_{\frac{1}{3}} x$.

○42.25. Дано: $f(x) = \log_2 x$. Докажите, что выполняется следующее соотношение:

а) $f(2^x) = x$;

б) $f(4^x) + f(8^x) = 5x$.

§ 43. Свойства логарифмов

Вычислите:

43.1. а) $\log_6 12 + \log_6 3$;

в) $\log_{26} 2 + \log_{26} 13$;

б) $\lg 25 + \lg 4$;

г) $\log_{12} 4 + \log_{12} 36$.

43.2. а) $\log_{144} 3 + \log_{144} 4$;

в) $\log_{216} 2 + \log_{216} 3$;

б) $\log_{\frac{1}{8}} 4 + \log_{\frac{1}{8}} 2$;

г) $\log_{12} \frac{1}{2} + \log_{12} \frac{1}{72}$.

43.3. а) $\log_3 7 - \log_3 \frac{7}{9}$;

в) $\log_{\frac{1}{2}} 28 - \log_{\frac{1}{2}} 7$;

б) $\log_2 15 - \log_2 30$;

г) $\log_{0,2} 40 - \log_{0,2} 8$.

○43.4. а) $\log_{\sqrt{3}} 6 - \log_{\sqrt{3}} 2\sqrt{3}$;

в) $\log_{\frac{2}{3}} 32 - \log_{\frac{2}{3}} 243$;

б) $\log_{\sqrt{2}} 7\sqrt{2} - \log_{\sqrt{2}} 14$;

г) $\log_{0,1} 0,003 - \log_{0,1} 0,03$.

○43.5. а) $(3 \lg 2 - \lg 24) : (\lg 3 + \lg 27)$;

б) $(\log_3 2 + 3 \log_3 0,25) : (\log_3 28 - \log_3 7)$.

○43.6. а) Известно, что $\log_3 2 = c$. Найдите $\log_3 8$.

б) Известно, что $\log_{0,5} 3 = a$. Найдите $\log_{0,5} 81$.

○43.7. а) Известно, что $\log_5 2 = a$. Найдите $\log_5 10$.

б) Известно, что $\log_6 4 = m$. Найдите $\log_6 24$.

○43.8. а) Известно, что $\log_6 42 = b$. Найдите $\log_6 7$.

б) Известно, что $\log_7 35 = n$. Найдите $\log_7 5$.

Найдите число x по его логарифму:

○43.9. а) $\log_2 x = \log_2 72 - \log_2 9$;

б) $\log_4 x = \log_4 2\sqrt{2} + \log_4 8\sqrt{8}$;

в) $\log_7 x = \log_7 14 - \log_7 98$;

г) $\lg x = \lg \frac{1}{8} + \lg \frac{1}{125}$.

○43.10. а) $\log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}} 19 - \log_{\frac{1}{2}} 38 + \log_{\frac{1}{2}} 3$;

б) $\log_{0,2} x = \log_{0,2} 93 + \log_{0,2} 4 - \log_{0,2} 31$;

в) $\log_{\sqrt{7}} x = 2\log_{\sqrt{7}} 4 - \log_{\sqrt{7}} 2 + \log_{\sqrt{7}} 5$;

г) $\log_{\frac{1}{3}} x = \log_{\frac{1}{3}} \frac{7}{9} + \log_{\frac{1}{3}} 21 - 2\log_{\frac{1}{3}} 7$.

○43.11. а) $\lg x = 2\lg 7 - 3\lg 3 + \lg 8$;

б) $\lg x = 2\lg 3 + \lg 6 - \frac{1}{2}\lg 9$;

в) $\lg x = \frac{1}{2}\lg 3 + \frac{2}{3}\lg 5 - \frac{1}{3}\lg 4$;

г) $\lg x = -\frac{1}{2}\lg 5 + \lg\sqrt{5} + \frac{1}{4}\lg 25$.

Вычислите:

43.12. а) $\log_2 4 \cdot \log_3 27$; в) $\log_{0,5} 0,25 \cdot \log_{0,3} 0,09$;

б) $\log_5 125 : \log_4 16$; г) $\lg 1000 : \lg 100$.

○43.13. а) $\log_{\frac{1}{2}} 4 \cdot \log_3 9 : \log_4 \frac{1}{4}$;

б) $\log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{3} : \log_{\frac{1}{7}} \sqrt{49} \cdot \log_5 \sqrt{5}$;

в) $\log_3 81 : \log_{0,5} 2 \cdot \log_5 125$;

г) $\log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5} \cdot \log_{0,3} \sqrt{0,3} : \lg 10\sqrt{0,1}$.

Вычислите:

○43.14. а) $2^{2+\log_2 5}$; б) $5^{\log_5 16-1}$; в) $3^{1+\log_3 8}$; г) $8^{\log_8 3-2}$.

○43.15. а) $2^{3\log_2 4}$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2\log_{\frac{1}{2}} 7}$; в) $5^{2\log_5 3}$; г) $(0,3)^{3\log_{0,3} 6}$.

○43.16. а) $8^{\log_2 3}$; б) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 13}$; в) $100^{\lg 5}$; г) $\left(\frac{1}{16}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 5}$.

○43.17. а) $36^{\frac{1}{2}\log_6 18}$; в) $121^{\frac{1}{2}\log_{11} 35}$;

б) $64^{\frac{1}{4}\log_8 25}$; г) $25^{\frac{1}{4}\log_5 9}$.

○43.18. а) $\left(\frac{1}{4}\right)^{1+0,5\log_{\frac{1}{2}} 14}$; в) $\left(\frac{1}{9}\right)^{1+\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 18}$;

б) $25^{1-0,5\log_5 11}$; г) $49^{1-0,5\log_7 14}$.

○43.19. а) $\sqrt[3]{81^{\log_9 6}-7^{\log_7 9}}$; б) $\sqrt[4]{36^{\log_6 5}-5^{\log_5 9}}$.

○43.20. а) $\dfrac{\log_7 25}{\log_7 5}$; б) $\dfrac{\log_{\frac{1}{2}} 9}{\log_{\frac{1}{2}} 27}$; в) $\dfrac{\log_4 36}{\log_4 6}$; г) $\dfrac{\log_{0,3} 32}{\log_{0,3} 64}$.

○43.21. а) $\dfrac{\frac{1}{2}\log_3 64-2\log_3 2}{\log_3 2}$; в) $\dfrac{2\log_{0,5} 2+\log_{0,5}\sqrt{10}}{\log_{0,5} 10-\log_{0,5}\sqrt{10}+\log_{0,5} 4}$;

б) $\dfrac{\log_6 12+2\log_6 2}{\frac{1}{3}\log_6 27+4\log_6 2}$; г) $\dfrac{\log_{0,3} 16}{\log_{0,3} 15-\log_{0,3} 30}$.

●43.22. а) $\log_4 \sin\frac{\pi}{12}+\frac{1}{3}\log_4 \sin^3\frac{13\pi}{6}+\log_4 \sin\frac{7\pi}{12}$;

б) $\frac{1}{2}\log_8\left(\cos\frac{\pi}{8}-\sin\frac{\pi}{8}\right)^2-\log_8\left(\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{8}\right)^{-1}$.

43.23. Известно, что положительные числа x, a, b и c связаны соотношением $x=\dfrac{a^2c^3}{\sqrt{b}}$. Выразите $\log_n x$ через логарифмы по основанию n чисел a, b, c.

43.24. Прологарифмируйте по основанию 2:

а) $16a^2b^3$; б) $\frac{1}{8}a\left(\sqrt{b}\right)^7$; в) $48a\sqrt{a}\cdot b^4$; г) $\dfrac{b^3}{4a^5}$.

43.25. Прологарифмируйте по основанию 5:

а) $125a^4 : b^4$;

б) $\dfrac{625(\sqrt{a}\,b)^3}{c^{\frac{1}{2}}}$;

в) $\dfrac{25\sqrt{5}\,a^6b^7}{c^3}$;

г) $\left(\dfrac{a^6}{\sqrt[5]{b^2}}\right)^{-3}$.

Решите уравнение:

43.26. а) $\log_4 x = \log_4 2 + \log_4 7$;

б) $\log_{\frac{1}{3}} x - \log_{\frac{1}{3}} 7 = \log_{\frac{1}{3}} 4$;

в) $\log_9 x = \log_9 5 + \log_9 6$;

г) $\log_{\frac{1}{4}} x - \log_{\frac{1}{4}} 9 = \log_{\frac{1}{4}} 5$.

43.27. а) $\log_6 12 + \log_6 x = \log_6 24$;

б) $\log_{0,5} 3 + \log_{0,5} x = \log_{0,5} 12$;

в) $\log_5 13 + \log_5 x = \log_5 39$;

г) $\log_{\frac{1}{3}} 8 + \log_{\frac{1}{3}} x = \log_{\frac{1}{3}} 4$.

43.28. а) $\log_2 3x = \log_2 4 + \log_2 6$;

б) $\log_{\sqrt{3}}\left(\dfrac{x}{2}\right) = \log_{\sqrt{3}} 6 + \log_{\sqrt{3}} 2$;

в) $\log_4 5x = \log_4 35 - \log_4 7$;

г) $\log_{\sqrt{2}}\left(\dfrac{x}{3}\right) = \log_{\sqrt{2}} 15 - \log_{\sqrt{2}} 6$.

○43.29. а) $\log_x 8 - \log_x 2 = 2$;

б) $\log_x 2 + \log_x 8 = 4$;

в) $\log_x 3 + \log_x 9 = 3$;

г) $\log_x \sqrt{5} + \log_x (25\sqrt{5}) = 3$.

43.30. Положительное число b записано в стандартном виде $b = b_0 \cdot 10^n$, где $1 \leqslant b_0 < 10$ и n — целое число. Найдите десятичный логарифм числа b:

а) $b = 9 \cdot 10^2$;

б) $b = 9 \cdot 10^{-3}$;

в) $b = 9 \cdot 10^4$;

г) $b = 9 \cdot 10^{-5}$.

(Для справок: $\lg 9 \approx 0,95$.)

43.31. Найдите десятичный логарифм числа:

а) $\lg 50$;

б) $\lg 0,005$;

в) $\lg 5000$;

г) $\lg 0,00005$.

(Для справок: $\lg 5 \approx 0,7$.)

○43.32. Вычислите:

а) $\log_{\sqrt{2}}\left(\sin\frac{\pi}{8}\right) + \log_{\sqrt{2}}\left(2\cos\frac{\pi}{8}\right)$;

б) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}\right) + \log_{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}\right)$;

в) $\log_{\frac{1}{2}}\left(2\sin\frac{\pi}{12}\right) + \log_{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)$;

г) $\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}\right) + \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12}\right)$.

○43.33. Известно, что $\log_3 2 = a$ и $\log_3 5 = b$. Выразите через a и b:

а) $\log_3 10$; б) $\log_3 20$; в) $\log_3 50$; г) $\log_3 200$.

●43.34. Сравните числа:

а) $\log_3 4$ и $\sqrt[4]{2}$; б) $\log_2 3$ и $\sqrt[3]{7}$.

Постройте график функции:

○43.35. а) $y = \log_2 8x$; в) $y = \log_3 \frac{x}{27}$;

б) $y = \log_{\frac{1}{2}} 4x$; г) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{x}{9}$.

○43.36. а) $y = \log_2 x^3$; в) $y = \log_3 \frac{1}{x}$;

б) $y = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{x}$; г) $y = \log_{\frac{1}{2}} x^3$.

○43.37. а) $y = \log_2 \frac{4}{x}$; в) $y = \log_3 9x^3$;

б) $y = \log_{\frac{1}{3}} \frac{x^3}{27}$; г) $y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{8}{x}$.

§ 44. Логарифмические уравнения

44.1. Решите уравнение:

а) $\log_2(3x - 6) = \log_2(2x - 3)$;

б) $\log_6(14 - 4x) = \log_6(2x + 2)$;

в) $\log_{\frac{1}{6}}(7x - 9) = \log_{\frac{1}{6}} x$;

г) $\log_{0,2}(12x + 8) = \log_{0,2}(11x + 7)$.

Решите уравнение:

○44.2. а) $\log_3 (x^2 + 6) = \log_3 5x$;

б) $\log_{\frac{1}{2}} (7x^2 - 200) = \log_{\frac{1}{2}} 50x$;

в) $\lg (x^2 - 6) = \lg (8 + 5x)$;

г) $\lg (x^2 - 8) = \lg (2 - 9x)$.

○44.3. а) $\log_{0,1} (x^2 + 4x - 20) = 0$;

б) $\log_{\frac{1}{3}} (x^2 - 10x + 10) = 0$;

в) $\log_7 (x^2 - 12x + 36) = 0$;

г) $\log_{12} (x^2 - 8x + 16) = 0$.

○44.4. а) $\log_3 (x^2 - 11x + 27) = 2$;

б) $\log_{\frac{1}{7}} (x^2 + x - 5) = -1$;

в) $\log_2 (x^2 - 3x - 10) = 3$;

г) $\log_{\frac{1}{3}} (x^2 + 3x - 1) = -2$.

○44.5. а) $\log_2 (x^2 + 7x - 5) = \log_2 (4x - 1)$;

б) $\log_{0,3} (-x^2 + 5x + 7) = \log_{0,3} (10x - 7)$;

в) $\log_2 (x^2 + x - 1) = \log_2 (-x + 7)$;

г) $\log_{0,2} (-x^2 + 4x + 5) = \log_{0,2} (-x - 31)$.

○44.6. а) $\log_2^2 x - 4 \log_2 x + 3 = 0$;

б) $\log_4^2 x - \log_4 x - 2 = 0$;

в) $\log_{\frac{1}{2}}^2 x + 3 \log_{\frac{1}{2}} x + 2 = 0$;

г) $\log_{0,2}^2 x + \log_{0,2} x - 6 = 0$.

○44.7. а) $2 \log_5^2 x + 5 \log_5 x + 2 = 0$;

б) $3 \log_4^2 x - 7 \log_4 x + 2 = 0$;

в) $2 \log_{0,3}^2 x - 7 \log_{0,3} x - 4 = 0$;

г) $3 \log_{\frac{1}{2}}^2 x + 5 \log_{\frac{1}{2}} x - 2 = 0$.

44.8. а) $\log_2 x = \log_2 3 + \log_2 5$;

б) $\log_7 4 = \log_7 x - \log_7 9$;

в) $\log_{\frac{1}{3}} 4 + \log_{\frac{1}{3}} x = \log_{\frac{1}{3}} 18$;

г) $\log_{0,4} 9 - \log_{0,4} x = \log_{0,4} 3$.

Решите уравнение:

О44.9. а) $2\log_8 x = \log_8 2{,}5 + \log_8 10$;

б) $3\log_2 \frac{1}{2} - \log_2 \frac{1}{32} = \log_2 x$;

в) $3\log_{\frac{1}{7}} x = \log_{\frac{1}{7}} 9 + \log_{\frac{1}{7}} 3$;

г) $4\log_{0,1} x = \lg_{0,1} 2 + \log_{0,1} 8$.

О44.10. а) $\log_3 (x - 2) + \log_3 (x + 2) = \log_3 (2x - 1)$;

б) $\log_{11} (x + 4) + \log_{11} (x - 7) = \log_{11} (7 - x)$;

в) $\log_{0,6} (x + 3) + \log_{0,6} (x - 3) = \log_{0,6} (2x - 1)$;

г) $\log_{0,4} (x + 2) + \log_{0,4} (x + 3) = \log_{0,4} (1 - x)$.

О44.11. а) $\log_{23} (2x - 1) - \log_{23} x = 0$;

б) $\log_{0,5} (4x - 1) - \log_{0,5} (7x - 3) = 1$;

в) $\log_{3,4} (x^2 - 5x + 8) - \log_{3,4} x = 0$;

г) $\log_{\frac{1}{2}} (x + 9) - \log_{\frac{1}{2}} (8 - 3x) = 2$.

О44.12. а) $\log_x (2x^2 + x - 2) = 3$;

б) $\log_{x-1} (12x - x^2 - 19) = 3$.

О44.13. а) $\lg^2 x - \lg x + 1 = \frac{9}{\lg 10x}$;

б) $\log_3^2 x + 3\log_3 x + 9 = \frac{37}{\log_3 \frac{x}{27}}$;

в) $\lg^2 x - 2\lg x + 4 = \frac{9}{\lg 100x}$;

г) $\log_2^2 x + 7\log_2 x + 49 = \frac{-218}{\log_2 \frac{x}{128}}$.

О44.14. а) $\lg 100x \cdot \lg x = -1$;

б) $\lg^2 10x + \lg 10x = 6 - 3\lg \frac{1}{x}$.

О44.15. а) $\log_5 (6 - 5^x) = 1 - x$; б) $\log_3 (4 \cdot 3^{x-1} - 1) = 2x - 1$.

○44.16. а) $x^{\log_3 x} = 81$; в) $x^{\log_2 x} = 16$;

б) $x^{\log_{0,5} x} = \frac{1}{16}$; г) $x^{\log_{\frac{1}{3}} x} = \frac{1}{81}$.

○44.17. а) $x^{1 + \log_3 x} = 9$; в) $x^{5 + \log_2 x} = \frac{1}{16}$;

б) $x^{\log_{0,5} x - 2} = 0{,}125$; г) $x^{\log_{\frac{1}{3}} x - 4} = 27$.

Решите систему уравнений:

○44.18. а) $\begin{cases} \log_2(x^2 + 3x - 2) - \log_2 y = 1, \\ 3x - y = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x + y = 7, \\ \log_3(x^2 + 4x - 3) - \log_3 y = 1. \end{cases}$

○44.19. а) $\begin{cases} \log_5 (x + y) = 1, \\ \log_6 x + \log_6 y = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \log_{0,5} (x + 2y) = \log_{0,5} (3x + y), \\ \log_7 (x^2 - y) = \log_7 x. \end{cases}$

○44.20. а) $\begin{cases} \log_9 (x - y) = \frac{1}{2}, \\ \log_{64} x - \log_{64} y = \frac{1}{3}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} (3x - y) = \log_{\frac{1}{3}} (x + 4), \\ \log_9 (x^2 + x - y) = \log_9 x^2. \end{cases}$

○44.21. а) $\begin{cases} 2^x \cdot 2^y = 16, \\ \log_3 x + \log_3 y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 9^x \cdot 3^y = 81, \\ \log_2 x + \log_2 y = 1. \end{cases}$

○44.22. а) $\begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-y} = \frac{1}{27}, \\ \log_2 2x - \log_2 y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{x} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{y} = \log_9 3, \\ \log_4 y - \log_4 x = 1. \end{cases}$

§ 45. Логарифмические неравенства

Решите неравенство:

45.1. а) $\log_2 x \geqslant 4$; в) $\log_2 x < \frac{1}{2}$;

б) $\log_2 x \leqslant -3$; г) $\log_2 x > -\frac{1}{2}$.

45.2. а) $\log_{\frac{1}{3}} x \leqslant 2$; в) $\log_{0,2} x < 3$;

б) $\log_{\frac{1}{2}} x \geqslant -3$; г) $\log_{0,1} x > -\frac{1}{2}$.

○45.3. а) $\log_5 (3x + 1) < 2$; в) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{x}{5} > 1$;

б) $\log_{0,5} \frac{x}{3} \geqslant -2$; г) $\log_{\sqrt{3}} (2x - 3) < 4$.

○45.4. а) $\log_5 x > \log_5 (3x - 4)$; в) $\log_{\frac{1}{3}} (5x - 9) \geqslant \log_{\frac{1}{3}} 4x$;

б) $\log_{0,6} (2x - 1) < \log_{0,6} x$; г) $\log_3 (8 - 6x) \leqslant \log_3 2x$.

○45.5. а) $\log_2 (5x - 9) \leqslant \log_2 (3x + 1)$;

б) $\log_{0,4} (12x + 2) \geqslant \log_{0,4} (10x + 16)$;

в) $\log_{\frac{1}{3}} (-x) > \log_{\frac{1}{3}} (4 - 2x)$;

г) $\log_{2,5} (6 - x) < \log_{2,5} (4 - 3x)$.

○45.6. а) $\log_3 (x^2 + 6) < \log_3 5x$;

б) $\log_{0,6} (6x - x^2) > \log_{0,6} (-8 - x)$;

в) $\lg (x^2 - 8) \leqslant \lg (2 - 9x)$;

г) $\log_{\sqrt{2}} (x^2 + 10x) \geqslant \log_{\sqrt{2}} (x - 14)$.

○45.7. а) $\log_{\frac{1}{2}} (6 - x) \geqslant \log_{\frac{1}{2}} x^2$;

б) $\log_{0,3} (x^2 + 22) < \log_{0,3} 13x$;

в) $\log_{\frac{1}{4}} (-x - 6) \leqslant \log_{\frac{1}{4}} (6 - x^2)$;

г) $\log_{0,5} (x^2 - 27) > \log_{0,5} 6x$.

Решите неравенство:

○45.8. а) $\log_8 (x^2 - 7x) > 1$; в) $\log_2 (x^2 - 6x + 24) < 4$;

б) $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 0{,}5x) \leqslant 1$; г) $\log_{\frac{1}{3}} \left(-x^2 + \frac{10x}{9}\right) \geqslant 2$.

○45.9. а) $\log_2^2 x > 4\log_2 x - 3$; в) $\log_4^2 x + \log_4 x \leqslant 2$;

б) $\log_{\frac{1}{2}}^2 x + 3\log_{\frac{1}{2}} x < -2$; г) $\log_{0,2}^2 x \geqslant 6 - \log_{0,2} x$.

○45.10. а) $\log_3 x > \log_3 72 - \log_3 8$;

б) $3\log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{3}} 9 + \log_{\frac{1}{3}} 3$;

в) $\log_5 x - \log_5 35 \leqslant \log_5 \frac{1}{7}$;

г) $4\log_{0,6} x \geqslant \log_{0,6} 8 + \log_{0,6} 2$.

○45.11. а) $\log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} (4 - x) > -1$;

б) $\log_2 (7 - x) + \log_2 x \geqslant 1 + \log_2 3$;

в) $\lg(7 - x) + \lg x > 1$;

г) $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} (10 - x) \geqslant -1 + \log_{\frac{1}{2}} 4{,}5$.

○45.12. а) $2\log_5^2 x + 5\log_5 x + 2 \geqslant 0$;

в) $3\log_4^2 x - 7\log_4 x + 2 < 0$;

б) $2\log_{0,3}^2 x - 7\log_{0,3} x - 4 \leqslant 0$;

г) $3\log_{\frac{1}{3}}^2 x + 5\log_{\frac{1}{3}} x - 2 > 0$.

○45.13. а) $\log_2^2 x^2 - 15\log_2 x - 4 \leqslant 0$;

б) $\log_{\frac{1}{3}}^2 x^2 - 7\log_{\frac{1}{3}} x + 3 \leqslant 0$;

в) $\log_3^2 x^2 + 13\log_3 x + 3 < 0$;

г) $\log_{\frac{1}{5}}^2 x^2 - 31\log_{\frac{1}{5}} x - 8 < 0$.

О45.14. Найдите наибольшее целочисленное решение неравенства:

а) $\log_7 (6x - 9) < \log_7 (2x + 3)$;

б) $\log_{\frac{1}{5}} (2 - x) \geqslant \log_{\frac{1}{5}} (2x + 4)$;

в) $\lg (8x - 16) < \lg (3x + 1)$;

г) $\log_{0,4} (7 - x) \geqslant \log_{0,4} (3x + 6)$.

О45.15. Сколько целочисленных решений имеет неравенство:

а) $\log_{12} (x^2 - x) \leqslant 1$;

б) $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 10x + 9) \geqslant 0$;

в) $\log_9 (x^2 - 8x) \leqslant 1$;

г) $\log_{0,3} (-x^2 + 7x - 5) < 0$?

Решите систему неравенств:

О45.16. а) $\begin{cases} \log_2 (2x + 3) > \log_2 (x - 2), \\ \log_6 (3x - 1) \leqslant \log_6 (9x + 4); \end{cases}$

б) $\begin{cases} \log_3 (6x - 1) \leqslant \log_3 (9x + 11), \\ \log_6 (3 - x) > \log_6 (4x - 1); \end{cases}$

О45.17. а) $\begin{cases} \log_3 x^2 > \log_3 125 - \log_3 5, \\ \log_{0,2} (x - 1) < 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x^2 \geqslant \log_{\frac{1}{2}} 28 - \log_{\frac{1}{2}} 7, \\ \log_3 (4x - 1) > 0. \end{cases}$

О45.18. а) $\begin{cases} \log_{0,1} (x^2 - 12) < \log_{0,1} (-x), \\ 2^{x-1} > \dfrac{1}{8}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3^{x^2 - 5x - 4} < 9, \\ \log_{\frac{1}{5}} (x^2 + 3) \geqslant \lg_{\frac{1}{5}} 4x. \end{cases}$

§ 46. Переход к новому основанию логарифма

○46.1. Вычислите:

а) $\log_2 \frac{1}{3} + \log_4 9$; в) $\log_{25} 9 - \log_5 3$;

б) $\log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{2} + \log_3 \frac{1}{2}$; г) $\log_{16} 4 - \log_4 8$.

○46.2. Известно, что $\log_2 3 = a$. Найдите:

а) $\log_3 2$; б) $\log_3 \frac{1}{2}$; в) $\log_3 4$; г) $\log_3 \frac{1}{4}$.

○46.3. Известно, что $\log_5 2 = b$. Найдите:

а) $\log_2 25$; б) $\log_2 \frac{1}{25}$; в) $\log_2 125$; г) $\log_2 \frac{1}{625}$.

○46.4. Известно, что $\log_2 3 = a$. Найдите:

а) $\log_4 9$; б) $\log_8 18$; в) $\log_4 81$; г) $\log_8 54$.

Сравните числа:

○46.5. а) $\log_2 7$ и $\log_7 4$; в) $\log_3 5$ и $\log_5 4$;

б) $\log_6 9$ и $\log_9 8$; г) $\log_{11} 14$ и $\log_{14} 13$.

○46.6. а) $\log_2 6$ и $\log_4 5$; в) $\log_9 6$ и $\log_3 7$;

б) $\log_{\frac{1}{2}} 3$ и $\log_{\frac{1}{4}} 1{,}5$; г) $\log_{\frac{1}{3}} 4$ и $\log_{\frac{1}{9}} 7$.

Решите уравнение:

○46.7. а) $\log_4 x + \log_{16} x + \log_2 x = 7$;

б) $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$.

○46.8. а) $3\log_3^2 x = \frac{5}{\log_x 3} + 2$; б) $2\log_2^2 x = \frac{5}{\log_x 2} + 3$.

Вычислите:

○46.9. а) $9^{\log_3 4} + \log_{\sqrt{6}} 3 \cdot \log_3 36$;

б) $\log_3 8 \cdot \log_2 27 - 3^{\log_9 25}$;

в) $3^{4\log_3 2} + \log_5 \sqrt{2} \cdot \log_4 25$;

г) $10^{0,5\lg 16} + 14\log_3 \sqrt{2} \cdot \log_4 81$.

●46.10. а) $\frac{\log_2 56}{\log_{28} 2} - \frac{\log_2 7}{\log_{224} 2}$; б) $\frac{\log_3 135}{\log_{45} 3} - \frac{\log_3 5}{\log_{1215} 3}$.

●46.11. Известно, что $\lg 2 = a$, $\lg 3 = b$. Вычислите:

а) $\log_4 12$; б) $\log_6 18$; в) $\log_{0,5} 3$; г) $\log_{\frac{1}{3}} 24$.

●46.12. Известно, что $\log_2 5 = a$, $\log_2 3 = b$. Вычислите:

а) $\log_3 15$; б) $\log_8 75$; в) $\log_{16} 45$; г) $\log_{15} 12$.

Решите уравнение:

○46.13. а) $\log_3 x + 1 = 2\log_x 3$; в) $\log_7 x - 1 = 6\log_x 7$;

б) $2\log_x 5 - 3 = -\log_5 x$; г) $\log_2 x + 9\log_x 2 = 10$.

●46.14. а) $\log_4(x + 12) \cdot \log_x 2 = 1$;

б) $1 + \log_x 5 \cdot \log_7 x = \log_5 35 \cdot \log_x 5$.

●46.15. а) $\log_{2x+1}(5 + 8x - 4x^2) + \log_{5-2x}(1 + 4x + 4x^2) = 4$;

б) $\log_{3x+7}(9 + 12x + 4x^2) = 4 - \log_{2x+3}(6x^2 + 23x + 21)$.

●46.16. Решите неравенство:

а) $\log_9 x^2 + \log_3^2(-x) < 2$; б) $\log_4 x^2 + \log_2^2(-x) > 6$.

§ 47. Дифференцирование показательной и логарифмической функций

47.1. Найдите производную функции $y = f(x)$.

а) $f(x) = 4 - e^x$; в) $f(x) = -8e^x$;

б) $f(x) = x^3e^x$; г) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^3}$.

Найдите значение производной заданной функции в указанной точке x_0:

47.2. а) $y = e^x + x^2$, $x_0 = 0$; в) $y = e^x - x$, $x_0 = 1$;

б) $y = e^x(x + 1)$, $x_0 = -1$; г) $y = \dfrac{e^x}{x+1}$, $x_0 = 0$.

47.3. а) $y = e^{3x-1}$, $x_0 = \dfrac{1}{3}$; в) $y = e^{4-9x}$, $x_0 = \dfrac{4}{9}$;

б) $y = 3e^{6+x}$, $x_0 = -5$; г) $y = e^{0,5x-3}$, $x_0 = 4$.

○47.4. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

а) $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot e^x$, $x_0 = 1$;

в) $f(x) = 4e^x + 3$, $x_0 = -2$;

б) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{e^x}$, $x_0 = 1$.

г) $f(x) = 0,1e^x - 10x$, $x_0 = 0$;

○47.5. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0:

а) $h(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^x$, $x_0 = 0$;

б) $h(x) = e^{-x+2}$, $x_0 = 2$;

в) $h(x) = \frac{1}{e^x} + x^5$, $x_0 = -1$;

г) $h(x) = x + e^{2x-3}$, $x_0 = 1{,}5$.

○47.6. Найдите угол, образованный касательной к графику функции $y = h(x)$ с положительным направлением оси абсцисс в точке с абсциссой x_0:

а) $h(x) = \frac{1}{5}e^{5x-1}$, $x_0 = 0{,}2$;

б) $h(x) = e^{-x-\sqrt{3}}$, $x_0 = -\sqrt{3}$;

в) $h(x) = \frac{1}{3}e^{1-3x}$, $x_0 = \frac{1}{3}$;

г) $h(x) = e^{\frac{\sqrt{3}}{3}x-1}$, $x_0 = \sqrt{3}$.

Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$:

○47.7. а) $y = e^x$, $a = 1$;

б) $y = e^x$, $a = 2$;

в) $y = e^x$, $a = 0$;

г) $y = e^x$, $a = -1$.

○47.8. а) $y = e^{3x-1}$, $a = \frac{1}{3}$;

б) $y = xe^{-2x+1}$, $a = 0{,}5$;

в) $y = \frac{2}{e^x}$, $a = 0$;

г) $y = \frac{e^x}{x+1}$, $a = 0$.

Постройте график функции:

○47.9. а) $y = e^{x+4}$;

б) $y = e^{-x} + 1$;

в) $y = e^{x-3}$;

г) $y = e^{x-2} - 3$.

○47.10. а) $y = \ln(x-4)$;

б) $y = \ln ex$;

в) $y = \ln(x+3)$;

г) $y = \ln\frac{x}{e}$.

○47.11. Исследуйте функцию на монотонность и экстремумы:

а) $y = x^2e^x$; б) $y = xe^{2x-4}$; в) $y = x^3e^x$; г) $y = \frac{e^x}{x}$.

○47.12. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^2e^x$ на заданном отрезке:

а) $[-1; 1]$; б) $[-3; 1]$; в) $[-3; -1]$; г) $[1; 3]$.

47.13. Найдите производную функции:

а) $y = x^2\ln x$;

б) $y = 3\ln x + \sin 2x$;

в) $y = \frac{x}{\ln x}$;

г) $y = 2\cos\frac{x}{2} - 5\ln x$.

Найдите значение производной заданной функции в указанной точке:

47.14. а) $y = \ln x + x, \quad x_0 = \frac{1}{7}$;

б) $y = x^3 \ln x, \quad x_0 = e$;

в) $y = x^2 - \ln x, \quad x_0 = 0{,}5$;

г) $y = \frac{\ln x}{x}, \quad x_0 = 1$.

47.15. а) $y = \ln(2x + 2), \quad x_0 = -\frac{1}{4}$;

б) $y = \ln(5 - 2x), \quad x_0 = 2$;

Составьте уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$:

○47.16. а) $f(x) = x^5 - \ln x, \quad a = 1$; в) $f(x) = -2x \ln x, \quad a = e$;

б) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}, \quad a = 1$; г) $f(x) = \sqrt[3]{x} \ln x, \quad a = 1$.

○47.17. а) $y = xe^{2x-1}$, $a = \frac{1}{2}$; в) $y = x^3 \ln x$, $a = e$;

б) $y = \frac{x^2 - 1}{e^{3-x}}$, $a = 2$; г) $y = (2x + 1)e^{1-2x}$, $a = \frac{1}{2}$.

Исследуйте функцию на монотонность и экстремумы:

○47.18. а) $y = x + \ln \frac{1}{x}$; б) $y = x^4 - 4 \ln x$.

○47.19. а) $y = e^{2x} - 3e^x + x + 4$; б) $y = 1 - 3x + 5e^x - e^{2x}$.

○47.20. а) $y = 2 \ln x^3 - 5x + \frac{x^2}{2}$; б) $y = \ln \frac{1}{x^3} + x^2 + x + 3$.

○47.21. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = x - \ln x$ на заданном отрезке:

а) $\left[\frac{1}{e}; e\right]$; б) $\left[e; e^2\right]$.

○47.22. Найдите наименьшее и наибольшее значения заданной функции на заданном отрезке:

а) $y = x + \ln(-x)$, $[-4, -0{,}5]$;

б) $y = x + e^{-x}$, $[-\ln 4, \ln 2]$.

○47.23. Напишите уравнение той касательной к графику функции $y = f(x)$, которая параллельна данной прямой $y = kx + m$:

а) $f(x) = e^{2x}$, $y = 2ex - 5$;

б) $f(x) = \ln(3x + 2)$, $y = x + 7$.

○47.24. Решите уравнение $f'(x) = a$, если:

а) $f(x) = 3e^{x+4}$, $a = \frac{3}{e}$;

б) $f(x) = 2 + \frac{1}{3}e^{-6x-13}$, $a = -2$;

в) $f(x) = 2e^{-7x+9}$, $a = -14$;

г) $f(x) = 42 - e^{0,1x-4}$, $a = 0,1$.

○47.25. Решите неравенство $g'(x) < a$, если:

а) $g(x) = 6 - \frac{1}{2}e^{2x-3}$, $a = \frac{1}{e^3}$;

б) $g(x) = x + e^{4x-3}$, $a = 5$;

в) $g(x) = \frac{1}{3}e^{3x+5}$, $a = \frac{1}{e}$;

г) $g(x) = e^{9x+21} - x$, $a = 8$.

●47.26. Проведите касательную к графику заданной функции так, чтобы она проходила через начало координат:

а) $y = e^{\frac{x}{2}}$;

б) $y = \ln x$;

в) $y = e^{\frac{x}{3}}$;

г) $y = \ln x^3$.

●47.27. При каком значении параметра a:

а) прямая $y = 3x - 4 + a$ является касательной к графику функции $y = \ln(3x - 4)$;

б) прямая $y = 2x + 3 + a$ является касательной к графику функции $y = \ln(2x + 3)$?

●47.28. При каких значениях параметра a функция $y = x^6e^{-x}$ на интервале $(a, a + 7)$:

а) имеет одну точку экстремума;

б) имеет две точки экстремума;

в) убывает;

г) возрастает?

ГЛАВА 8

Первообразная и интеграл

§ 48. Первообразная

Докажите, что функция $y = F(x)$ является первообразной для функции $y = f(x)$, если:

48.1. а) $F(x) = x^2 + x^3$, $f(x) = 2x + 3x^2$;

б) $F(x) = x^4 - x^{11}$, $f(x) = 4x^3 - 11x^{10}$;

в) $F(x) = x^7 + x^9$, $f(x) = 7x^6 + 9x^8$;

г) $F(x) = x^{13} - x^{19}$, $f(x) = 13x^{12} - 19x^{18}$.

48.2. а) $F(x) = 3\sin x$, $f(x) = 3\cos x$;

б) $F(x) = -4\cos x$, $f(x) = 4\sin x$;

в) $F(x) = -9\sin x$, $f(x) = -9\cos x$;

г) $F(x) = 5\cos x$, $f(x) = -5\sin x$.

Для функции $y = f(x)$ найдите хотя бы одну первообразную:

48.3. а) $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$; б) $f(x) = \dfrac{7}{x^2}$.

48.4. а) $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; б) $f(x) = \dfrac{6}{\sqrt{x}}$.

48.5. а) $f(x) = x^2 + x^{16}$; в) $f(x) = x^{13} + x^{18}$;

б) $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x^2}$; г) $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 1$.

48.6. а) $f(x) = 4x^3 - 6x^2$;

б) $f(x) = -3\sin x + 2\cos x$;

в) $f(x) = 5x^4 - 3x^5$;

г) $f(x) = -13\sin x + \dfrac{5}{\cos^2 x}$.

48.7. а) $f(x) = e^x + \frac{1}{x}$; в) $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}$;

б) $f(x) = \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{5}{\sin^2 x}$; г) $f(x) = \sqrt[5]{x} - 2e^x$.

48.8. а) $y = \sin^2 x + \cos^2 x$; в) $y = 1 + \operatorname{tg}^2 x$;

б) $y = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$; г) $y = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$.

○48.9. а) $f(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$; в) $f(x) = \cos(4x - 3)$;

б) $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$; г) $f(x) = \sin\left(2 - \frac{x}{2}\right)$.

○48.10. а) $f(x) = -\frac{1}{(6x+1)^2}$; в) $f(x) = \frac{1}{(7x-3)^2}$;

б) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{7x-9}}$; г) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{42-3x}}$.

○48.11. а) $f(x) = \sin 2x$; в) $f(x) = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$;

б) $f(x) = e^{2x-5} - \cos 3x$; г) $f(x) = \sqrt[3]{3x-1} + \frac{1}{2-7x}$.

○48.12. Для данной функции найдите ту первообразную, график которой проходит через заданную точку M:

а) $y = \sin x,\ M\left(\frac{\pi}{3};\ \frac{1}{4}\right)$; в) $y = \cos x,\ M\left(\frac{\pi}{6};\ 1\right)$;

б) $y = \frac{1}{\cos^2 x},\ M\left(\frac{\pi}{4};\ -1\right)$; г) $y = \frac{1}{\sin^2\frac{x}{3}},\ M\left(\frac{3\pi}{4};\ 0\right)$.

○48.13. Точка движется по координатной прямой, ее скорость задана формулой $v = 1 + 2t$, t — время движения. Найдите закон движения, если известно, что в момент времени $t = 2$ координата точки равнялась числу 5.

○48.14. Скорость движения точки по координатной прямой задана формулой $v = -4\sin 3t$, t — время движения. Найдите закон движения, если известно, что в момент времени $t = 0$ координата точки равнялась числу 2.

○48.15. Скорость движения точки по координатной прямой задана формулой $v = \frac{6}{\sqrt{2t+1}}$, t — время движения. Найдите закон движения, если $s(0) = 3$.

○48.16. Ускорение движения точки по координатной прямой задано формулой $a(t) = 2(t+1)^2$, t — время движения. Найдите закон изменения скорости $v = v(t)$ и закон движения $s = s(t)$, если $v(0) = 1$, $s(0) = 1$.

○48.17. Для функции $y = g(x)$ найдите ту первообразную, график которой проходит через заданную точку M:

а) $g(x) = 8\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, $M\left(\frac{\pi}{2};\ 3\right)$;

б) $g(x) = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$, $M\left(\frac{\pi}{2};\ 16\right)$;

в) $g(x) = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$, $M(0;\ 7)$;

г) $g(x) = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$, $M\left(\frac{\pi}{2};\ 15\right)$.

○48.18. Найдите ту первообразную для заданной функции $y = f(x)$, график которой касается оси x:

а) $f(x) = 2x + 3$; б) $f(x) = 12(3x - 1)^3$.

○48.19. Некоторая первообразная функции $y = 3\cos 3x + 6\sin 6x$ принимает в точке $x = \frac{\pi}{2}$ значение 6. Какое значение принимает та же первообразная в точке $x = \frac{\pi}{6}$?

●48.20. Найдите ту первообразную для заданной функции $y = f(x)$, график которой касается заданной прямой $y = kx + m$:

а) $f(x) = 2x$, $y = x + 2$; б) $f(x) = 3x^3$, $y = 3x + 4{,}75$.

●48.21. Известно, что функция $y = F(x)$ является первообразной для функции $y = f(x)$. Найдите точки экстремума функции $y = F(x)$, если:

а) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{x - 1}}$; в) $f(x) = \frac{3x - 6}{\sqrt[3]{2x + 4}}$;

б) $f(x) = (25x - x^3)\ln x$; г) $f(x) = \frac{x^3 - 9x}{\sqrt[4]{2 - x}}$.

●48.22. Известно, что функция $y = F(x)$ — первообразная для функции $y = f(x)$. Что больше — $F(a)$ или $F(b)$, если:

а) $f(x) = (2x - 10)\sqrt{x - 3}$, $a = 3{,}3$, $b = 4{,}1$;

б) $f(x) = (3x + 60)\sqrt[3]{2x - 4}$, $a = 15$, $b = 17$?

§ 49. Определенный интеграл

Вычислите:

○49.1. а) $\int\limits_{-\frac{2}{3}}^{1} x^3 dx$; б) $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{x^2}$; в) $\int\limits_{-1}^{2} x^4 dx$; г) $\int\limits_{4}^{9} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

○49.2. а) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\, dx$; б) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$; в) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$; г) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$.

○49.3. а) $\int\limits_{0}^{1} e^x dx$; б) $\int\limits_{-1}^{1} 3e^x dx$; в) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{1}{2} e^x dx$; г) $\int\limits_{-2}^{1} -2e^x dx$.

○49.4. а) $\int\limits_{0}^{4} e^{0,5x-1} dx$; в) $\int\limits_{-4}^{4} e^{0,25x+1} dx$;

б) $\int\limits_{-1}^{1} e^{2x+1} dx$; г) $\int\limits_{-0,5}^{0} e^{-2x+2} dx$.

○49.5. а) $\int\limits_{-1}^{0} \sqrt[3]{1 - 2x}\, dx$; в) $\int\limits_{2/3}^{11} 5\sqrt[5]{3x-1}\, dx$;

б) $\int\limits_{4}^{5} \frac{1}{(x-3)^3} dx$; г) $\int\limits_{2}^{3} (5x - 7)^{-\frac{2}{3}} dx$.

○49.6. а) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x}$; в) $\int\limits_{0}^{1} \frac{0,1}{x+1} dx$;

б) $\int\limits_{1}^{2} \left(e^x + \frac{1}{x}\right) dx$; г) $\int\limits_{1}^{2} \left(e^{2x} + \frac{2}{x}\right) dx$.

○49.7. Вычислите:

а) $\int\limits_3^6 \frac{dx}{2x-1}$; б) $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{-5x+6}$; в) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4x+1}dx$; г) $\int\limits_5^8 \frac{dx}{9-x}$.

○49.8. Материальная точка движется по прямой со скоростью, определяемой формулой $v = v(t)$ (время измеряется в секундах, а скорость — в сантиметрах в секунду). Какой путь пройдет точка за 3 секунды, считая от начала движения ($t = 0$)?

а) $v(t) = 3t^2 - 4t + 1$; в) $v(t) = 4t^3 - 6t^2$;

б) $v(t) = \frac{1}{\sqrt{5t+1}}$; г) $v(t) = \frac{1}{\sqrt{7t+4}}$.

○49.9. Дан прямолинейный стержень длиной l. Он неоднороден и его плотность в точке, удаленной от левого конца на x, $0 \leqslant x \leqslant l$, определяется по формуле $\rho = \rho(x)$. Найдите массу стержня, если:

а) $\rho(x) = x^2 - x + 1,\quad l = 6$;

б) $\rho(x) = \frac{1}{(x+3)^2},\quad l = 3$;

в) $\rho(x) = -x^2 + 6x,\quad l = 2$;

г) $\rho(x) = \frac{1}{(2x+1)^2},\quad l = 1$.

○49.10. Вычислите $\int\limits_{-2}^{3} f(x)dx$, если график функции $y = f(x)$ изображен на:

а) рис. 68; б) рис. 69.

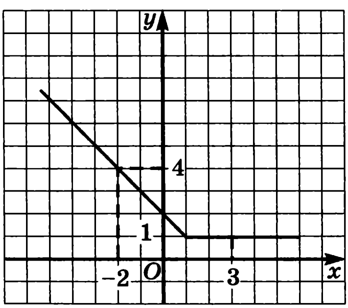

Рис. 68

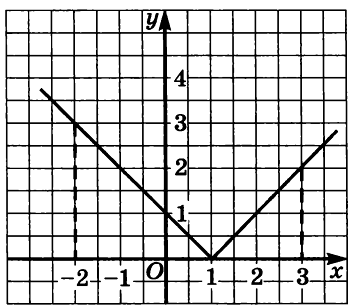

Рис. 69

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

○49.11. а) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 4$;

б) $y = x^3$, $y = 0$, $x = -3$, $x = 1$;

в) $y = x^2$, $y = 0$, $x = -3$;

г) $y = x^4$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$.

○49.12. а) $y = x^3 + 2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$;

б) $y = -x^2 + 4x$, $y = 0$.

○49.13. а) $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$;

б) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 9$.

○49.14. а) $y = \sin x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$;

б) $y = \cos 2x$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{6}$;

в) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$;

г) $y = \sin \frac{x}{2}$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$.

○49.15. а) $y = 1 + \frac{1}{2}\cos x$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$;

б) $y = 1 - \sin 2x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$.

○49.16. а) $y = 0$, $x = 4$, $y = \sqrt{x}$;

б) $y=0$, $x=1$, $x=3$, $y=\frac{1}{x^2}$;

в) $y = 1$, $x = 0$; $y = \sqrt[3]{x}$;

г) $y = 2$, $x = 0$, $y = \sqrt{x}$.

○49.17. а) $y = \sqrt{x}$, $y = -2\sqrt{x}$, $x = 4$;

б) $y = 2\sqrt{x}$, $y = -\sqrt{x}$, $x = 9$.

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

○49.18. а) $y = 0,\ x = 0,\ x = 3,\ y = e^x$;

б) $y = 0,\ x = 0,\ x = 4,\ y = e^{-x}$;

в) $y = 0,\ x = -1,\ x = 1,\ y = e^x$;

г) $y = 0,\ x = -2,\ x = 0,\ y = e^{-x}$.

○49.19. а) $x = 1,\ \ y = e^x,\ y = e^{-x}$;

б) $y = \frac{1}{e^x},\ y = 1,\ x = -1$;

в) $y = e^x,\ x = 2,\ x + 2y = 2$;

г) $y = e^x,\ \ y = -e^x,\ x = 2,\ x = 0$.

○49.20. а) $y = 0,\ x = 1,\ x = e,\ y = \frac{1}{x}$;

б) $y = 0,\ x = 3,\ x = -1,\ y = \frac{1}{2x + 3}$;

в) $y = 0,\ x = e,\ x = e^2,\ y = \frac{2}{x}$;

г) $y = 0,\ x = 2,\ x = 5,\ y = \frac{1}{3x - 5}$.

○49.21. а) $y = e^x,\ y = \frac{1}{x},\ x = 2,\ x = 3$;

б) $y = \frac{1}{x},\ y = 1,\ x = 5$;

в) $y = \sqrt{x},\ y = \frac{1}{x},\ x = 4$;

г) $y = -\frac{1}{x},\ y = -1,\ x = e$.

○49.22. Найдите площадь фигуры, изображенной на:
а) рис. 70; б) рис. 71; в) рис. 72; г) рис. 73;

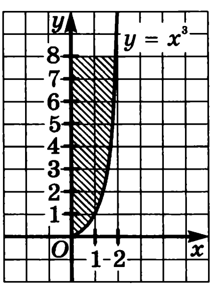

Рис. 70

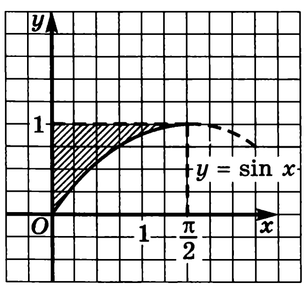

Рис. 71

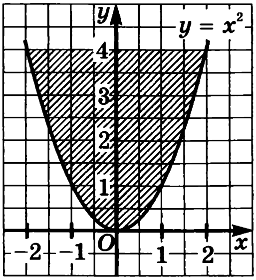

Рис. 72

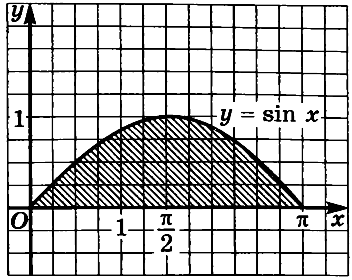

Рис. 73

Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

○**49.23.** а) $y = 1 - x^2,\ y = -x - 1$;

б) $y = x^2 - 3x + 2,\ y = x - 1$;

в) $y = x^2 - 1,\ y = 2x + 2$;

г) $y = -x^2 + 2x + 3,\ y = 3 - x$.

○**49.24.** а) $y = x^2 - 4x,\ y = -(x - 4)^2$;

б) $y = x^2 + 2x - 3,\ y = -x^2 + 2x + 5$.

○**49.25.** а) $y = x^2 - 6x + 9,\ y = (x + 1)(3 - x)$;

б) $y = x^2 - 4x + 3,\ y = -x^2 + 6x - 5$.

●**49.26.** а) $y = 3 - x^2,\ y = 1 + |x|$; б) $y = x^2,\ y = 2 - |x|$.

●**49.27.** Вычислите:

а) $\int\limits_{-3}^{6} f(x)\,dx$, где $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } -3 \leqslant x \leqslant 2, \\ 6 - x, & \text{если } x > 2; \end{cases}$

б) $\int\limits_{\frac{1}{4}}^{2} f(x)\,dx$, где $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & \text{если } 0 < x \leqslant 1, \\ x^3, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

○**49.28.** Используя геометрические соображения, вычислите интеграл:

а) $\int\limits_{0}^{4} \sqrt{16 - x^2}\,dx$; б) $\int\limits_{-5}^{0} \sqrt{25 - x^2}\,dx$.

Используя геометрические соображения, вычислите интеграл:

●49.29. а) $\int\limits_0^4 \sqrt{4x - x^2}\,dx$; б) $\int\limits_{-1}^0 \sqrt{-x^2 - 2x}\,dx$.

●49.30. а) $\int\limits_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4 - x^2}\,dx$; б) $\int\limits_{-4}^4 \sqrt{64 - x^2}\,dx$.

●49.31. Найдите площадь параболического сегмента, изображенного на:

а) рис. 74; б) рис. 75.

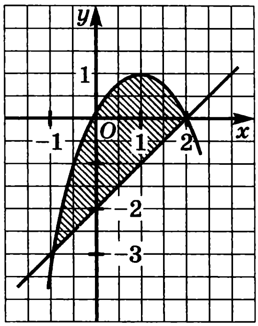

Рис. 74

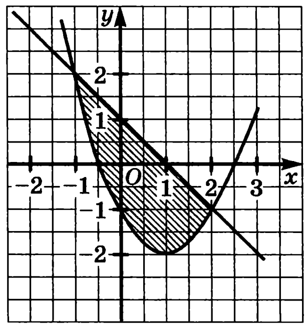

Рис. 75

●49.32. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = \sin 2x$, $y = \frac{16x^2}{\pi^2}$; в) $y = \cos x$, $y = \left(\frac{2x}{\pi} - 1\right)^2$;

б) $y = x^2 - 1$, $y = \cos \frac{\pi x}{2}$; г) $y = x^2 - 2x$, $y = \sin \frac{\pi x}{2}$.

●49.33. а) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^3$, касательной к нему в точке $x = 1$ и осью y.

б) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^3$ и касательными к нему в точках $x = 0$ и $x = 1$.

●49.34. а) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ и касательной к нему в точке $x = 3$.

б) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^3 - 3x$ и касательной к нему в точке $x = -1$.

ГЛАВА 9 Элементы математической статистики, комбинаторики и теории вероятностей

§ 50. Статистическая обработка данных

О50.1. Ученик выписал из дневника свои отметки за март. Вот что получилось:

4, 4, 3, 2, 5, 3, 3, 4, 5, 4, 4, 4, 5, 4, 2, 4, 4, 5, 3, 3.

а) Составьте сгруппированный ряд этих данных.

б) Чему равна мода этого измерения и какова ее кратность?

в) Выпишите таблицу распределения данных.

г) Найдите среднее значение отметок за март.

О50.2. В очередном туре футбольного чемпионата состоялись 10 матчей. Вот их результаты:

3:1, 0:2, 1:1, 0:0, 0:4, 0:1, 2:2, 0:3, 1:0, 1:1.

Футбольный статистик подсчитал результативность матчей (количество голов).

а) Выпишите (не сгруппированный) ряд полученных данных.

б) Сгруппируйте его и составьте таблицу распределения данных и распределения их частот (в процентах).

в) Постройте гистограмму распределения данных.

г) Найдите среднюю результативность матчей в этом туре.

О50.3. Лидеру партии принесли следующую сводку данных о проголосовавших за его партию по пяти избирательным участкам одного округа:

	Избирательный участок				
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5
Процент проголосовавших за партию	7	8	10	2	9
Число голосовавших, тыс. чел.	14	12	10	20	11

а) Найдите среднее результатов в процентах.

б) Подсчитайте общее количество голосовавших на этих пяти участках.

в) Подсчитайте количество проголосовавших за партию на каждом участке.

г) Пройдет ли партия 7%-ый барьер в этом округе?

○50.4. По приведенной гистограмме распределения данных (рис. 76) найдите:

а) количество вариант и объем измерения;

б) размах и моду измерения;

в) таблицу распределения данных;

г) среднее результатов измерения.

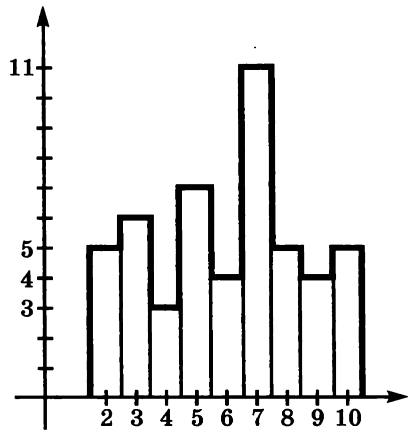

Рис. 76

●50.5 а) Найдите частоту каждой из букв в строке «Октябрь уж наступил...» из стихотворения «Осень» А. С. Пушкина.

б) Найдите частоту (в процентах) букв слова «гром» среди всех букв двустишия «...Как бы резвяся и играя / Грохочет в небе голубом...» из стихотворения Ф. И. Тютчева.

в) Найдите моду и ее кратность среди всех букв двустишия «Это дерево сосна, / И судьба сосны ясна...» из стихотворения Ю. Минералова.

г) Измеряется длина слов в отрывке из поэмы А. С. Пушкина «Медный всадник». Составьте ряд данных и постройте гистограмму распределения этих данных.

«...Ужасен он в окрестной мгле!
Какая дума на челе!
Какая сила в нем сокрыта!
А в сем коне какой огонь!

Куда ты скачешь, гордый конь,
И где опустишь ты копыта?...»

О50.6. Каждый из трех участников статистического эксперимента 200 раз бросил игральный кубик и записал, сколько раз выпало каждое из возможных чисел очков. Получились такие данные:

	Число очков						
	1	2	3	4	5	6	Сумма
Результаты участника № 1	45	29	35	31	28	32	200
Результаты участника № 2	31	32	41	34	36	26	200
Результаты участника № 3	27	40	23	39	30	41	200

а) Составьте гистограмму распределения данных участника № 1;

б) Составьте гистограмму распределения данных участника № 2;

в) Для общего числа данных, полученных участниками № 1 и № 2, составьте таблицу распределения и гистограмму.

г) Для общего числа данных, полученных участниками № 1—3, составьте таблицу распределения и гистограмму.

О50.7. По приведенным данным из сводной таблицы распределения результатов некоторого измерения:

	Варианта				
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	Сумма
Кратность		x	y	$x + y$	50
Частота					
Частота, %		$23x - 105$	$y^2 - y - 70$		

а) найдите x;

б) найдите y;

в) восстановите всю таблицу;

г) найдите моду этого распределения.

Ниже, в задачах 50.8—50.11, рассматриваются результаты одного и того же измерения: речь идет об отметках, которые получили выпускники одной из школ за сочинение. Выставлялись две отметки: первая — по литературе, вторая — по русскому языку. Отметки эти таковы:

5/4 4/5 3/1 4/3 2/3 3/3 4/3 5/3 3/3 1/2

4/4 4/2 2/1 3/5 3/4 4/3 5/5 4/4 5/4 2/2

2/3 4/3 5/4 2/3 3/3

○**50.8.** Для отметок по литературе:
а) выпишите сгруппированный ряд данных;
б) составьте таблицу распределения кратностей;
в) постройте многоугольник распределения процентных частот;
г) найдите среднее.

○**50.9.** Для отметок по русскому языку:
а) выпишите сгруппированный ряд данных;
б) составьте таблицу распределения кратностей;
в) постройте многоугольник распределения процентных частот;
г) найдите среднее.

○**50.10.** Итоговая отметка за сочинение была выставлена по инструкции: «2», если сумма отметок меньше 5; «3», если сумма отметок равна 5 или 6; «4», если сумма отметок равна 7 или 8, и «5» — в остальных случаях.
а) Определите число итоговых двоек.
б) Определите число итоговых пятерок.
в) Составьте таблицу распределения итоговых отметок.
г) Нарисуйте гистограмму распределения итоговых отметок.

●**50.11.** а) Вычислите дисперсию и среднее квадратичное распределения отметок по литературе.
б) Вычислите дисперсию и среднее квадратичное распределения отметок по русскому языку.
в) По какому предмету отметки в среднем выше?
г) По какому предмету отметки имеют более устойчивый характер?

§ 51. Простейшие вероятностные задачи

○51.1. Перед новогодним праздником Деду Морозу выдали набор подарков. Все подарки сделаны в виде одинаковых по размеру пластмассовых шаров. Всего в мешок Деда Мороза положили 12 красных, 14 белых, 13 синих и 11 оранжевых шаров. Какова вероятность того, что первый вытащенный подарок будет:

а) белого цвета;

б) красный или оранжевый;

в) одного из цветов российского флага;

г) не оранжевого цвета?

○51.2. На координатной плоскости отмечены все точки, абсциссы и ординаты которых равны одному из следующих чисел: -4, -1, 1, 4, 8 (повторения допускаются). Из отмеченных точек случайным образом выбирают одну. Найдите вероятность того, что она лежит:

а) правее оси ординат;

б) ниже оси абсцисс;

в) в четвертой координатной четверти;

г) ниже прямой $y = x$.

○51.3. В круге радиуса $\sqrt{3}$ с центром в начале координат отмечены все точки, абсциссы и ординаты являются целыми числами. Из отмеченных точек случайным образом выбирают одну. Найдите вероятность того, что:

а) она лежит на оси ординат;

б) она лежит не на координатных осях;

в) она лежит в круге радиуса 1 с центром в начале координат;

г) ее абсцисса и ордината отличаются более чем на 2.

●51.4. Составили множество всех чисел вида $x = 2^a 5^b$, где a, $b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ (совпадения допускаются). Из этого множества случайным образом выбрали одно число. Какова вероятность того, что оно будет:

а) больше 1;

б) меньше 20;

в) нечетным;

г) не оканчиваться нулем?

51.5. Для заданного события назовите противоположное:
а) мою новую соседку по парте зовут или Таня, или Аня;
б) явка на выборы была от 40% до 47% включительно;
в) из пяти выстрелов в цель попали хотя бы два;
г) на контрольной я не решил одну или две задачи из пяти.

51.6. Назовите событие, для которого противоположным является данное событие:
а) на контрольной работе больше половины класса получили пятерки;
б) все семь пулек в тире у меня попали мимо цели;
в) в нашем классе — все и умные, и красивые;
г) в кошельке у меня есть или три рубля одной монетой, или три доллара одной купюрой.

○51.7. Ученику предложили написать на доске любое натуральное число от 100 до 200. Найдите вероятность того, что:
а) это число нечетно;
б) среди цифр этого числа есть 3;
в) это число не является кубом целого числа;
г) сумма его цифр больше 3.

○51.8. Игральную кость бросили дважды. Найдите вероятность того, что:
а) среди выпавших чисел нет ни одной пятерки;
б) среди выпавших чисел есть или пятерка, или шестерка;
в) сумма выпавших чисел меньше 11;
г) произведение выпавших чисел меньше 25.

○51.9. Из костей домино выбрали одну. Какова вероятность того, что:
а) она является дублем;
б) на ней выпала «шестерка»;
в) произведение очков на ней меньше 26;
г) модуль разности очков больше 1?

●51.10. В русском языке 33 буквы: 10 гласных, 21 согласная и две специальные буквы (ъ и ь). Два ученика независимо друг от друга выбрали по одной букве русского алфавита. Какова вероятность того, что:
а) были выбраны различные буквы;
б) обе выбранные буквы — гласные;
в) среди выбранных букв есть согласные;
г) это две соседние буквы алфавита.

○51.11. Из пяти чисел 1, 2, 3, 4, 5 поочередно выбирают два. Найдите вероятность того, что:

а) первое из чисел меньше второго;

б) эти два числа — длины катетов прямоугольного треугольника с целочисленной гипотенузой;

в) произведение этих чисел оканчивается нулем;

г) первое из чисел делится на второе.

○51.12. Случайно и поочередно нажимают три клавиши одной октавы. Найдите вероятность того, что:

а) не была нажата «фа»

б) не были нажаты ни «до», ни «си»;

в) была нажата «ля»;

г) получилось до-мажорное трезвучие «до-ми-соль».

§ 52. Сочетания и размещения

○52.1. Двузначное число составляют из цифр 0, 1, 3, 4, 5, 6, 9 (повторения цифр допустимы).

а) Сколько всего можно составить чисел?

б) Сколько всего можно составить чисел, больших 50?

в) Сколько всего можно составить нечетных чисел?

г) Сколько всего можно составить нечетных чисел, меньших 55?

○52.2. В шахматном зале — 5 столов. Для проведения игры за каждый стол садится по одному шахматисту из двух встречающихся команд. В каждой команде 5 шахматистов.

а) Найдите число всех возможных составов матча (Иванов — Петров, Сидоров — Каспаров и т. д.).

б) То же, но для двух независимо проводимых матчей.

в) То же, но если во втором матче участвует по три лучших шахматиста из каждой команды.

г) То же, что и в пункте б), но если во втором матче капитаны команд обязательно играют между собой.

○52.3. Вычислите:

а) $\dfrac{7! + 8!}{5! + 6!}$; в) $\dfrac{1}{6!} + \dfrac{1}{5!} - \dfrac{49}{7!}$;

б) $\dfrac{1}{4!} + \dfrac{10}{5!} + \dfrac{630}{6!}$; г) $\dfrac{7}{11} \cdot \dfrac{(10!)^2 - (9!)^2}{(8!)^2 - (7!)^2}$

○52.4. Найдите наименьшее натуральное число n, для которого:

а) верно неравенство $(n + 1)! > (0{,}99n + 5) \cdot n!$

б) верно неравенство $(n + 1)! > (n + 333) \cdot (n - 1)!$

в) число $\frac{2^n}{n!}$ меньше единицы;

г) число $n!$ составляет более 1000% от числа $(n - 1)!$

●52.5. Сколькими нулями оканчивается число:

а) $10!$; б) $15!$; в) $26!$; г) $100!$?

○52.6. В правильном 17-угольнике провели все стороны и все диагонали.

а) Сколько всего провели отрезков?

б) Сколько провели сторон?

в) Сколько провели диагоналей?

г) Сколько диагоналей, которые отсекают треугольник от 17-угольника?

52.7. Важен или нет порядок в следующих выборах:

а) капитан волейбольной команды и его заместитель;

б) три ноты в аккорде;

в) «шесть человек останутся убирать класс!»?

г) Придумайте 4 различные ситуации, в двух из которых порядок выбора важен, а в двух — нет.

Вычислите:

52.8. а) C_{17}^2 и A_{17}^2; б) C_{100}^2 и A_{100}^2; в) C_5^3 и A_5^3; г) C_8^4 и A_8^4.

○52.9. а) $C_{27}^2 - C_{26}^2$; б) $\frac{A_{10}^3}{C_{10}^3}$; в) $\frac{A_8^6}{A_{10}^2}$; г) $C_{11}^5 - C_{11}^6$.

Решите уравнение:

○52.10. а) $C_x^3 = 2C_x^2$; в) $C_x^2 + C_{x+1}^2 = 49$;

б) $C_x^{x-2} = 15$; г) $C_8^x = 70$.

○52.11. а) $A_x^5 = 18A_{x-2}^4$; в) $C_x^3 = A_x^2$;

б) $A_{x-1}^2 - C_x^1 = 79$; г) $C_x^4 = A_x^3 + C_x^3$.

●52.12. Решите неравенство:

а) $120 < A_{k-3}^2 < 140$; в) $C_{10}^2 < A_x^2 < 60$;

б) $C_6^2 < A_n^2 < C_8^2$; г) $C_{19}^2 < A_x^2 + C_x^2 < 200$.

●52.13. Найдите значение n, при котором:

а) число C_{n+1}^2 составляет 80% от числа C_n^3;

б) число C_{n+1}^3 составляет 120% от числа C_n^4;

в) число C_{2n}^{n+1} составляет 56% от числа C_{2n+1}^{n-1};

г) число C_{2n+3}^{n} составляет 120% от числа C_{2n+2}^{n+1}.

○52.14. «Вороне где-то Бог послал кусочек сыра», брынзы, колбасы, сухарика и шоколада. «На ель Ворона взгромоздясь, позавтракать совсем уж было собралась, да призадумалась»:

а) если есть кусочки по очереди, то из скольких вариантов придется выбирать;

б) сколькими способами можно составить «бутерброд» из двух кусочков;

в) если съесть сразу три кусочка, а остальные спрятать и съесть завтра и послезавтра, то из скольких вариантов придется выбирать;

г) сколько получится, если один кусочек все-таки бросить Лисе, а потом ответить на вопрос а)?

●52.15. Три клавиши из семи клавиш, соответствующих нотам до, ре, ми, фа, соль, ля, си одной октавы, можно нажать либо одновременно (аккорд), либо поочередно (трезвучие).

а) Найдите число всех возможных трезвучий.

б) Найдите число всех возможных аккордов.

в) Найдите число всех возможных аккордов, содержащих ноту соль.

г) Найдите число всех возможных аккордов, в которых нет подряд идущих нот.

○52.16. Из колоды в 36 карт выбирают 5 карт и потом одновременно открывают их. Найдите:

а) число всех возможных вариантов открытых карт;

б) число вариантов, при которых среди открытых карт есть 4 туза;

в) число вариантов, при которых все открытые карты пиковой масти;

г) число вариантов, при которых все открытые карты одной масти.

○52.17. За четверть в классе прошли 5 тем по алгебре. Для подготовки к контрольной работе составлено по 10 задач к каждой теме. На контрольной будет по одной задаче из каждой темы. Ученик умеет решать только по 8 задач в каждой теме. Найдите:

а) общее число всех вариантов контрольной работы;

б) число тех вариантов, в которых ученик умеет решать все пять задач;

в) число тех вариантов, в которых ученик ничего не может решить;

г) число тех вариантов, в которых ученик умеет решать все задачи, кроме первой.

●52.18. Встретились несколько человек и стали здороваться друг с другом. Рукопожатий было от 60 до 70. Сколько всего человек встретилось, если известно, что:

а) каждый здоровался с каждым;

б) только один человек не здоровался ни с кем;

в) только двое не поздоровались между собой;

г) четверо поздоровались только между собой?

●52.19. Из 20 вопросов к экзамену ученик 12 выучил, 5 совсем не смотрел, а в остальных что-то знает, а что-то нет. На экзамене в билете будет три вопроса.

а) Найдите количество возможных вариантов билета.

б) Сколько из них тех, в которых ученик знает ответы на все вопросы?

в) Сколько из них тех, в которых есть вопросы всех трех типов?

г) Сколько из них тех, в которых ученик выучил большинство ответов на вопросы?

●52.20. В театре 10 певцов и 8 певиц, а в хоре из премьерной оперы 5 мужских партий и 3 женские партии.

а) Сколько существует различных составов хора?

б) То же, но если известно, что певцы А и Б ни за что не будут петь вместе.

в) То же, но если известно, что певец А будет петь тогда и только тогда, когда будет петь певица В.

г) То же, если 6 певцов накануне сорвали голос на футболе и одной певице придется петь мужскую партию.

§ 53. Формула бинома Ньютона

53.1. Раскройте скобки в выражении:

а) $(x + 1)^7$; в) $(x^2 + 2)^5$;

б) $(2x - y)^6$; г) $(1 - x^3)^4$.

○**53.2.** Найдите коэффициент при первой степени переменной x у многочлена $P(x)$:

а) $P(x) = (1 + x)^7$; в) $P(x) = (3 - 2x)^5$;

б) $P(x) = (1 + 3x)^4$; г) $P(x) = (x + 2)^5 - (2x + 1)^4$.

●**53.3.** Найдите коэффициент при x^3 у многочлена $P(x)$:

а) $P(x) = (1 + 3x)^4$; в) $P(x) = (x + 2)^5 - (2x + 1)^4$;

б) $P(x) = (3 - 2x)^5$; г) $P(x) = (x^2 - x)^4 + \left(3 - \dfrac{x}{3}\right)^4$

●**53.4.** Найдите член разложения, не содержащий переменных:

а) $\left(2x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^6$; б) $\left(3\sqrt[4]{a} + \dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^9$.

○**53.5.** В разложении $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^{10}$ по степеням переменной x укажите:

а) одночлен, содержащий x^8;

б) одночлен, содержащий x^4;

в) одночлен, содержащий x^{-2};

г) свободный коэффициент (одночлен, не содержащий x).

○**53.6.** Чему равен наибольший коэффициент в разложении $(a + b)^n$, если сумма биномиальных коэффициентов разложения равна: а) 1024; б) 512? Сколько в разложении членов с этим наибольшим коэффициентом?

●**53.7.** Докажите, что для любого натурального числа $n > 1$ и любого положительного числа x справедливо неравенство $(1 + x)^n > 1 + nx$.

§ 54. Случайные события и их вероятности

○**54.1.** На стойке для CD-дисков в беспорядке расположены 20 (с торца неразличимых) дисков с копиями компьютерных игр. Из них 12 — «квесты», а остальные — «рокады».

Десятиклассник случайным образом выбирает два диска. Какова вероятность того, что:

а) оба они окажутся с «квестами»;

б) оба они — с «рокадами»;

в) эти диски — с играми разных типов?

г) Чему равна сумма вероятностей в пунктах а), б), в)?

○54.2. Из колоды в 36 карт вытаскивают две карты и одновременно открывают их. Найдите вероятность того, что:

а) обе карты черной масти;

б) обе карты пиковой масти;

в) обе карты крестовой масти;

г) одна из карт пиковой масти, а другая — крестовой.

○54.3. В темном ящике — 9 билетов, разложенных по одному в одинаковые конверты. Из них 5 выигрышных билетов и 4 проигрышных. Вы наудачу вытаскиваете 3 конверта. Найдите вероятность того, что:

а) все билеты выигрышные;

б) есть ровно один проигрышный билет;

в) есть ровно один выигрышный билет;

г) есть хотя бы один выигрышный билет.

●54.4. Карточка лотереи «Спортлото» содержит 49 чисел. В итоге тиража выигрывают какие-то 6 чисел. Какова (в процентах) вероятность того, что на Вашей карточке, где отмечены 6 чисел, верно угадано ровно:

а) 0 чисел; б) 1 число; в) 2 числа; г) 3 числа?

○54.5. Красивых учеников в классе всего 22, а умных 18. Всего в классе 30 учеников и каждый из них умный или красивый. Какова вероятность того, что случайно вызванный по списку класса ученик:

а) и умный, и красивый;

б) умный, но не красивый;

в) красивый, но не умный.

Измените в условии число 30 (сохранив 18 умных учеников) так, чтобы ответы в пунктах а) и в) были одинаковы.

○54.6. При подготовке к экзамену один ученик решил 44 задачи из общего списка в 50 задач, а второй ученик решил 26 задач из этого же списка. Известно, что каждую задачу из общего списка задач кто-то из учеников решил. Какова вероятность того, что случайным образом выбранную из списка задачу:

а) решили оба ученика;

б) решил первый, но не решил второй ученик;

в) решил второй, но не решил первый ученик?

Измените в условии число 50 (сохранив 26 задач для второго ученика) так, чтобы ответы в пунктах а) и б) были одинаковы.

О54.7. Опишите произведение следующих событий:

а) A — у случайным образом составленного квадратного уравнения есть корни; B — дискриминант уравнения отрицателен;

б) A — у случайным образом составленного квадратного уравнения нет корней; B — дискриминант уравнения неположителен;

в) A — случайным образом выбранная функция $y = f(x)$, $x \in \boldsymbol{R}$ возрастает; B — верно неравенство $f(99) < f(100)$;

г) A — случайным образом выбранная числовая последовательность является геометрической прогрессией; B — первые два ее члена положительны, а следующие два — отрицательны.

О54.8. Найдите вероятность $P(A + B)$ суммы двух независимых событий A и B, если известно, что:

а) $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}5$; в) $P(A) = 0{,}9$, $P(B) = 0{,}9$;

б) $P(A) = 0{,}9$, $P(B) = 0{,}1$; г) $P(A) = 0{,}99$, $P(B) = 0{,}01$.

О54.9. Два стрелка независимо друг от друга по одному разу стреляют в мишень. Вероятности попадания в мишень по отдельности равны соответственно 0,8 и 0,6. Найти вероятность того, что мишень:

а) будет поражена дважды;

б) не будет поражена ни разу;

в) будет поражена хотя бы один раз;

г) будет поражена ровно один раз.

О54.10. Пусть вероятность «успеха» в одном испытании Бернулли равна 0,7. Пользуясь теоремой Бернулли, составьте формулы для следующих событий:

а) при трех независимых повторениях испытания будет ровно 2 «успеха»;

б) при четырех независимых повторениях испытания будет ровно 2 «неудачи»;

в) при пяти независимых повторениях испытания будет ровно 3 «успеха».

Вычислите вероятности в а) — в).

●54.11. Каждый из четырех приятелей выучил ровно 5 вопросов из 20 заданных к зачету. На зачете они отвечали в разных аудиториях и получали вопросы независимо друг от друга. Найдите вероятность того, что:

а) каждому достался тот вопрос, который он выучил;

б) никому не достался вопрос, который он выучил;

в) только одному из них достался тот вопрос, который он не выучил;

г) хотя бы одному из них достался тот вопрос, который он выучил.

○54.12. Случайным образом выбирают одно из решений неравенства $x^2 \leqslant 9$. Найдите вероятность того, что оно является решением неравенства:

а) $x^2 \leqslant 10$; б) $2x - 3 \leqslant 17$; в) $x^2 \geqslant 10$; г) $x^3 + 2x \geqslant 0$.

○54.13. Случайным образом выбирают одно из решений неравенства $1 \leqslant |x - 3| \leqslant 5$. Найдите вероятность того, что оно является решением неравенства:

а) $|x| \leqslant 2$; б) $|x - 6| \leqslant 2$; в) $|x| \leqslant 1$; г) $1 \leqslant |x - 6| \leqslant 2$.

○54.14. В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AB = 2$, $BC = 5$ случайно выбирают точку. Найдите вероятность того, что она расположена:

а) ближе к прямой AB, чем к прямой CD;

б) ближе к вершине A, чем к вершине C;

в) ближе к прямой AB, чем к прямой BC;

г) ближе к вершине A, чем к точке пересечения диагоналей.

●54.15. Внутри окружности, описанной около прямоугольного треугольника с катетами 6 и 8, взята точка. Найдите вероятность того, что она:

а) лежит внутри треугольника;

б) лежит внутри окружности, вписанной в треугольник;

в) лежит вне треугольника;

г) лежит внутри треугольника, но не внутри вписанной в него окружности.

●54.16. Карточка лотереи «Спортлото» содержит 49 чисел. В итоге тиража выигрывают какие-то 6 чисел. Какова (в процентах) вероятность того, что на вашей карточке, где отмечены 6 чисел, верно угадано:

а) хотя бы одно число; в) не менее трех чисел;

б) не более одного числа; г) 4, 5 или 6 чисел?

○54.17. Из чисел 1, 2, 3, 4, 5 одновременно выбирают три. Найдите вероятность того, что:

а) существует прямоугольный треугольник с такими сторонами;

б) существует треугольник с такими сторонами;

в) их произведение оканчивается на ноль;

г) их сумма меньше 10.

●54.18. Вы находитесь в круглом зале с 10 дверями, из которых какие-то 4 заперты. Вы случайным образом выбираете две двери. Найдите вероятность того, что:

а) вы не сможете выйти из зала;

б) вы сможете выйти из зала, но вернуться через другую дверь уже не сможете;

в) вы сможете через одну дверь выйти, а через другую вернуться в зал;

г) хотя бы через одну дверь вы сможете выйти из зала.

●54.19. У каждого из туристов есть или тугрики, или евро. У 100 туристов есть только тугрики, у 38 туристов есть только евро, а у 31 % туристов есть обе валюты.

а) Сколько туристов имеют только одну валюту?

б) Сколько всего туристов?

в) Сколько туристов имеют тугрики?

г) Сколько туристов имеют евро?

○54.20. Вероятность $P(A + B)$ суммы двух независимых событий A и B равна 0,9. Найдите, чему равна вероятность $P(B)$ события B, если известно, что вероятность $P(A)$ события A равна:

а) 0,1; б) 0,5; в) 0,8; г) 0,89.

●54.21. Два стрелка независимо друг от друга по одному разу стреляют в мишень. Вероятность попадания в мишень одного из них равна 0,5. Найти вероятность попадания в мишень другого стрелка, если известно, что:

а) вероятность того, что мишень будет поражена дважды, равна 0,4;

б) вероятность того, что мишень не будет поражена ни разу, равна 0,45;

в) вероятность того, что мишень будет поражена хотя бы один раз, равна 0,8;

г) вероятность того, что мишень будет поражена хотя бы один раз, равна 0,999.

●54.22. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при одном выстреле, равна 0,4. Стрелок независимо производит 5 выстрелов.

а) Заполните таблицу распределения вероятностей $P_5(k)$ того, что из 5 выстрелов будет ровно k попаданий:

Число попаданий, k						
$P_5(k) = C_5^k \cdot 0{,}4^k \cdot 0{,}6^{5-k}$						

б) Найдите вероятность того, что стрелок ни разу не промажет.

в) Найдите вероятность того, что стрелок поразит мишень не менее двух раз.

г) Каково наиболее вероятное число попаданий в мишень?

●54.23. Случайным образом выбирают одно из решений неравенства $\sqrt{x} \leqslant 10$. Найдите вероятность того, что оно:

а) является решением неравенства $\sqrt{x} \leqslant 1$;

б) принадлежит области определения функции

$$y = \ln(40x - 39 - x^2);$$

в) является решением неравенства $\sqrt{x - 10} \leqslant 5$;

г) принадлежит области значений функции

$$y = 0{,}5 \sin\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right) + 1.$$

○54.24. Произвольно выбирают числа x и y так, что $|x| \leqslant 1$ и $|y| \leqslant 1$. Точку (x, y) отмечают на координатной плоскости. Какова вероятность того, что:

а) эта точка лежит в первой координатной четверти;

б) $x + y < 0$;

в) эта точка лежит или во второй, или в четвертой координатной четверти;

г) $x + y > 0$, а $xy < 0$?

○54.25. Точка случайным образом выбрана из фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$, осью абсцисс и прямой $x = 3$. Найдите вероятность того, что она лежит:

а) левее прямой $x = 1$;

б) правее прямой $x = 2$;

в) выше прямой $y = 4$;

г) ниже прямой $y = 1$.

ГЛАВА 10

Уравнения и неравенства. Системы уравнений и неравенств

§ 55. Равносильность уравнений

55.1. Равносильно ли уравнение $2^x = 256$ уравнению:

а) $\log_2 x = 3$;

б) $x^2 - 9x + 8 = 0$;

в) $3x^2 - 24x = 0$;

г) $\frac{16}{x} = 2$?

55.2. Равносильно ли уравнение $\sin x = 0$ уравнению:

а) $\cos x = 1$;

б) $\operatorname{tg} x = 0$;

в) $\cos 2x = 1$;

г) $\sqrt{x - 1} \cdot \sin x = 0$?

55.3. Придумайте три уравнения, равносильные уравнению:

а) $\sqrt{2x - 1} = 3$;

б) $\cos x = 3$;

в) $\lg x^2 = 4$;

г) $x^{\frac{3}{5}} = -1$.

Равносильны ли уравнения:

55.4. а) $\sqrt{2x^2 + 2} = \sqrt{x^4 + 3}$ и $2x^2 + 2 = x^4 + 3$;

б) $\sqrt[4]{\sin^2 x + 1} = 1$ и $\sin^2 x = 0$?

55.5. а) $3^{\sqrt{x} + 4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x = 1$ и $\sqrt{x} + 4 - x = 0$;

б) $\sqrt{0{,}5^x} \cdot 2^{x^2}\sqrt{2} = 4$ и $x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} = 2$?

55.6. а) $\frac{x^2 + 3x - 1}{x^2 + 1} = 3$ и $x^2 + 3x - 1 = 3x^2 + 3$;

б) $\frac{\sin x + 1}{\sin x + 2} = 0{,}5$ и $\sin x + 1 = 0{,}5 \sin x + 1$?

Докажите, что уравнение не имеет корней:

○55.7. а) $\sqrt{3x-5} = \sqrt{9-7x}$;

б) $\sqrt{x^2-4} + \sqrt{1-x^2} = 4$.

○55.8. а) $\lg(x^2-9) + \lg(4-x^2) = 1$;

б) $\lg(x^2-3x) - \lg(2x-x^2) = 0{,}5$.

Решите уравнение:

○55.9. а) $\sqrt{7x-6} = x$;

б) $x+3 = \sqrt{2x+9}$;

в) $\sqrt{6x-11} = x-1$;

г) $-x-5 = \sqrt{7x+23}$.

○55.10. а) $\sqrt{x^4-3x-1} = x^2-1$;

б) $\sqrt{x^4-3x-1} = 1-x^2$;

в) $\sqrt{x^4+x-9} = 1-x^2$;

г) $\sqrt{x^4+x-9} = x^2-1$.

●55.11. а) $(x^2-9)\left(\sqrt{3-2x}-x\right) = 0$;

б) $(x^2-16)\left(\sqrt{4-3x}-x\right) = 0$.

●55.12. а) $\sin 2x \cdot \sqrt{4-x^2} = 0$;

б) $(\cos 2x - 1)\cdot\sqrt{9-x^2} = 0$;

в) $\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\cdot\sqrt{1-x^2} = 0$;

г) $\operatorname{tg} x \cdot \sqrt{16-x^2} = 0$.

§ 56. Общие методы решения уравнений

56.1. Будет ли уравнение вида $h(f(x)) = h(g(x))$ равносильно уравнению $f(x) = g(x)$:

а) $3^{2-x} = 3^{x^2-4x}$;

б) $(3x^2-2)^4 = (x-3)^4$;

в) $\sqrt[3]{7-x} = \sqrt[3]{5x+1}$;

г) $\lg\frac{1}{x} = \lg(2x-7)$?

Решите уравнение:

О56.2. а) $2^{\sqrt{x-3}} = \frac{1}{2}\sqrt{32}$;

б) $10^{\log_2(x-3)} \cdot 0{,}00001 = 0{,}1^{\log_2(x-7)}$.

О56.3. а) $0{,}5^{\sin x - \cos x} = 1$; б) $(\sqrt{3})^{\sin^2 x - 1} \cdot 3\sqrt{3} = \sqrt[4]{729}$.

О56.4. а) $\log_3(x^2 - 10x + 40) = \log_3(4x - 8)$;

б) $\log_{\sqrt{3}} \frac{x-2}{2x-4} = \log_{\sqrt{3}} \frac{x+1}{x+2}$.

О56.5. а) $(x^2 - 6x)^5 = (2x - 7)^5$;

б) $(\sqrt{6x-1} + 1)^9 = (\sqrt{6x+8})^9$.

О56.6. а) $(2^{2x} + 16)^{20} = (10 \cdot 2^x)^{20}$;

б) $(\log_{0,1}^2 x - 2)^3 = (2\log_{0,1} x + 1)^3$.

О56.7. а) $2^{x^2+3} - 8^{x+1} = 0$; б) $27^{5-x^2} - 3^{x^2-1} = 0$.

О56.8. а) $(\sqrt{3})^{\operatorname{tg} x} = \frac{3\sqrt{3}}{3^{\operatorname{tg} x}}$; б) $(\sqrt{2})^{2\cos x} = \frac{1}{2 \cdot 2^{\cos x}}$.

О56.9. а) $\log_{\frac{2}{3}}(7x + 9) - \log_{\frac{2}{3}}(8 - x) = 1$;

б) $\log_{1,2}(3x - 1) + \log_{1,2}(3x + 1) = \log_{1,2} 8$.

Решите уравнение методом разложения на множители:

О56.10. а) $x^3 - 9x^2 + 20x = 0$;

б) $x^3 + x^2 - 9x - 9 = 0$.

О56.11. а) $\sqrt{x^5} - 3\sqrt{x^3} - 18\sqrt{x} = 0$;

б) $\sqrt[4]{x^9} - 2\sqrt[4]{x^5} - 15\sqrt[4]{x} = 0$.

Решите уравнение методом разложения на множители:

О56.12. а) $2^x \cdot x - 4x - 4 + 2^x = 0$;

б) $3^x \cdot x - 3^{x+1} + 27 = 9x$.

О56.13. а) $2x^2 \sin x - 8 \sin x + 4 = x^2$;

б) $2x^2 \cos x + 9 = 18 \cos x + x^2$.

О56.14. а) $\sin 2x = \sin x$;

б) $\cos^2 (\pi - x) + \sin 2x = 0$;

в) $\sqrt{3} \cos 3x = \sin 6x$;

г) $\sin^2 \left(\pi + \frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2} \sin x = 0$.

Решите уравнение методом введения новой переменной:

О56.15. а) $8x^6 + 7x^3 - 1 = 0$; б) $x^8 + 3x^4 - 4 = 0$.

О56.16. а) $\sqrt{x^2 + 1 - 2x} - 6\sqrt{x - 1} = 7$;

б) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} - 6 = 5\sqrt{2 - x}$.

О56.17. а) $\sqrt{\frac{2x+3}{2x-1}} + 4\sqrt{\frac{2x-1}{2x+3}} = 4$; б) $\sqrt{\frac{5x-1}{x+3}} + 5\sqrt{\frac{x+3}{5x-1}} = 6$.

О56.18. а) $2^x + 2^{1-x} = 3$; в) $5^x + 4 = 5^{2x+1}$;

б) $25^{-x} - 50 = 5^{-x+1}$; г) $3^{x+1} - 29 = -18 \cdot 3^{-x}$.

О56.19. а) $7^{2x+1} - 50 \cdot 7^x = -7$; в) $4 \sin^2 x + 4 = 17 \sin x$;

б) $\log_2^2 x + 12 = 7 \log_2 x$; г) $\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x} - 2 = 0$.

О56.20. а) $\lg^2 x^2 + \lg 10x - 6 = 0$;

б) $3^x + 3^{-x+1} = 4$;

в) $2 \cos^2 x - 7 \cos x - 4 = 0$;

г) $5^{2\sqrt{x}} + 125 = 6 \cdot 5^{\sqrt{x}+1}$.

Решите уравнение, используя функционально-графические методы:

○56.21. а) $x = \sqrt[3]{x}$; б) $|x| = \sqrt[5]{x}$.

○56.22. а) $2^x = 6 - x$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 4$.

○56.23. а) $(x - 1)^2 = \log_2 x$; б) $\log_{\frac{1}{2}} x = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$.

○56.24. а) $1 - \sqrt{x} = \ln x$; б) $\sqrt{x} - 2 = \frac{9}{x}$.

Решите уравнение:

○56.25. а) $(x - 1)^4 + 36 = 13(x^2 - 2x + 1)$;

б) $(2x + 3)^4 - 9 = 8(4x^2 + 12x + 9)$.

○56.26. а) $\sqrt{6x^2 - 3} = \sqrt{5x - 2}$; б) $\sqrt{3x^2 - 5x} = \sqrt{x^2 + 2x - 5}$.

○56.27. а) $\sqrt{2x^2 - 11x + 6} = 2x - 9$; б) $\sqrt{x^2 + 2x - 8} = 2x - 4$.

○56.28. а) $16x - 15\sqrt{x} - 1 = 0$; в) $3x - 8\sqrt{x} + 5 = 0$;

б) $2 - x + 3\sqrt{2 - x} = 4$; г) $5\sqrt{x + 3} + x + 3 = 6$.

○56.29. а) $\sqrt[5]{x} - \sqrt[10]{x} - 2 = 0$; в) $\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} + 8 = 0$;

б) $\sqrt[4]{x} + 2\sqrt[8]{x} - 3 = 0$; г) $6\sqrt[4]{x} - 2\sqrt[8]{x} - 4 = 0$.

○56.30. а) $\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1} = \sqrt{2}$; б) $\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x - 1} = \sqrt{3}$.

○56.31. а) $\sqrt{3x - 1} + \sqrt{6x + 2} = \sqrt{9x + 1}$;

б) $\sqrt{6x - 14} + \sqrt{5 - x} = \sqrt{5x - 9}$.

○56.32. а) $x^2 - 4x - 6 = \sqrt{2x^2 - 8x + 12}$;

б) $\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x^2 = 3x + 7$.

Решите уравнение:

○56.33. а) $\sin^2 x + \cos^2 2x = 1$;

б) $\cos^2 3x - \sin^2 3x - \cos 4x = 0$.

○56.34. а) $\cos 5x + \cos 7x - \cos 6x = 0$;

б) $\sin 9x - \sin 5x + \sin 4x = 0$.

○56.35. а) $\cos 6x - \cos 2x + \cos 8x - \cos 4x = 0$;

б) $\sin 3x - \sin x + \cos 3x - \cos x = 0$.

○56.36. а) $3\,\mathrm{tg}^2 x - 8 = 4\cos^2 x$; б) $4\sin^2 x = 4 - 9\,\mathrm{tg}^2 x$.

●56.37. а) $\sin x \cos x - 6\sin x + 6\cos x + 6 = 0$;

б) $5\sin 2x - 11\sin x = 11\cos x - 7$.

●56.38. а) $2^x \cdot 5^{\frac{1+x}{x}} = 50$; в) $3^{x-1} \cdot 625^{\frac{x-2}{x-1}} = 225$;

б) $3^x \cdot 2^{\frac{3}{x}} = 24$; г) $5^x \cdot 2^{\frac{2-x}{x}} = 40$.

●56.39. а) $2^{5x-1}\left(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\log_{0,5}(x + 4) = 0$;

б) $(\sin 2x + \cos 2x)(x - 8\sqrt{2x - 15}) = 0$.

●56.40. а) $\sin \frac{5\pi}{4}x = x^2 - 4x + 5$; б) $-\cos 7\pi x = x^2 - 6x + 10$.

●56.41. а) $\sqrt{x^2 - 2x + 2} + \log_3 \sqrt{x^3 - 2x + 10} = 2$;

б) $(x - 7)^6 + \log_5 \sqrt{x^2 - 14x + 74} = 1$.

●56.42. а) $\log_2 (x^2 - 4x + 8) = \sin \frac{5\pi x}{4} - \cos \frac{\pi x}{2}$;

б) $\log_3 (x^2 + 4x + 13) = \cos \pi x - \sin \frac{\pi x}{4}$.

§ 57. Решение неравенств с одной переменной

57.1. Придумайте три неравенства, равносильные неравенству:

а) $x^2 - 9 \leqslant 0$; б) $\frac{1}{x} < \frac{1}{3}$.

57.2. Являются ли равносильными неравенства:

а) $\sin x + 2\log_3 x > 20$ и $\sin x > 20 - 2\log_3 x$;

б) $\frac{\sin x}{\sqrt{x^2 + 1}} \geqslant 1$ и $\sin x \geqslant \sqrt{x^2 + 1}$;

в) $13 - 13^{x^2-4} \geqslant 10^x$ и $13 \geqslant 10^x + 13^{x^2-4}$;

г) $10^{4x-1} \cdot \lg(x^2 - 4) < 0$ и $\lg(x^2 - 4) < 0$?

57.3. Данное неравенство замените более простым равносильным неравенством:

а) $\lg (x^2 + 9) > \lg (2x^2 + 4)$;

б) $1{,}4^{7x-9} \leqslant 1{,}4^{x^2-6}$;

в) $\sqrt[5]{4x - 9} \geqslant \sqrt[5]{7x + 9}$;

г) $\log_{0,2} (16x^2 + 8) < \log_{0,2} (x^2 + 1)$.

Решите систему неравенств:

○57.4. а) $\begin{cases} 3x - 11 > 2x + 13, \\ 17x + 9 < 9x + 99; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x + 2 \leqslant 4x + 24, \\ 2x - 1 \geqslant x + 7. \end{cases}$

○57.5. а) $\begin{cases} (x + 1)^2 - (x - 1)^2 \geqslant 12, \\ (x + 4)(x - 4) - (x + 2)^2 < 9; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x - 2)(x^2 + 2x + 4) - x^3 < 8x, \\ 3x - 16 \leqslant x. \end{cases}$

Решите систему неравенств:

○57.6. а) $\begin{cases} x^3 < x, \\ 3x^2 - x > 5 - 15x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x + 5}{x - 7} < 1, \\ \dfrac{3x + 4}{4x - 2} > -1. \end{cases}$

○57.7. а) $\begin{cases} \dfrac{x}{x + 2} - \dfrac{24}{(x + 2)^2} < 0, \\ -3x < 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x^2 - 1{,}5x - 7}{(x - 4)^2} > 0, \\ x^2 < 25. \end{cases}$

Решите совокупность неравенств:

○57.8. а) $\left[\begin{array}{l} x^2 - 4 > 0, \\ x - 6 < 0; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} x(x + 1) \leqslant 0, \\ 3x - 9 > 0. \end{array}\right.$

○57.9. а) $\left[\begin{array}{l} (x + 3)^3 \geqslant 27, \\ 4x - 1 < 12x; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} (x + 3)(x^2 - 3x + 9) < 54, \\ x^2 - 9 > 0. \end{array}\right.$

Решите неравенства, применяя теоремы о равносильности:

○57.10. а) $\log_{14} (x - 1) \leqslant \log_{14} (2x + 3)$;

б) $\log_{0,3} (2x + 1) < \log_{0,3} (x - 3)$.

Решите неравенства, применяя теоремы о равносильности:

○57.11. а) $\log_{\frac{1}{\pi}}(2x^2 - 5x) \geqslant \log_{\frac{1}{\pi}}(2x - 3)$;

б) $\lg(5x^2 - 15x) \leqslant \lg(2x - 6)$.

○57.12. а) $2^{\sqrt{x+4}} \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{128}$; б) $0{,}5^{\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}} \leqslant 1$.

○57.13. а) $(x^2 - 6x)^5 \geqslant (2x - 7)^5$; б) $(x^2 - 2x)^9 \leqslant (2x - x^2 - 2)^9$.

●57.14. а) $(2^{x+1} + 1)^6 \geqslant (2^x + 17)^6$;

б) $(2 \cdot 0{,}1^x + 3)^{10} \leqslant (0{,}1^x + 103)^{10}$.

●57.15. а) $(3 - 3\log_{0,2} x)^{13} < (\log_{0,2} x + 7)^{13}$;

б) $(3\log_7 x - 24)^5 > (2\log_7 x - 22)^5$.

Решите неравенство методом введения новой переменной:

○57.16. а) $3^{2x} - 2 \cdot 3^x - 3 \geqslant 0$; б) $2 \cdot 5^{2x} - 5^x - 1 \leqslant 0$.

○57.17. а) $3^{1+x} \cdot 2^{1-x} + 3^x \cdot 2^{-x} \leqslant 10{,}5$;

б) $2^x \cdot 5^{1-x} + 2^{x+1} \cdot 5^{-x} \geqslant 2{,}8$.

○57.18. а) $\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x} - 2 > 0$; б) $\sqrt[5]{x} - 6\sqrt[10]{x} + 8 < 0$.

○57.19. а) $3^x + 3^{-x+1} \leqslant 4$; б) $25^{-x} - 50 > 5^{-x+1}$.

○57.20. а) $\log_2^2 x - 7\log_2 x + 12 < 0$;

б) $3\log_{\frac{1}{3}}^2 x - 10\log_{\frac{1}{3}} x + 3 \geqslant 0$.

●57.21. а) $\log_2^2(x - 1) + 3\log_2(x - 1) + 2 \geqslant 0$;

б) $9^{\log_{0,1} x} - 4 \cdot 3^{\log_{0,1} x} + 0{,}1^{\log_{0,1} 3} < 0$.

●57.22. а) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 \leqslant 0$; б) $\cos^2 x - 5\cos x + 4 \leqslant 0$.

Решите неравенство, применяя функционально-графические методы:

○57.23. а) $3^x > 12 - 1{,}5x$; в) $3^x \leqslant 12 - 1{,}5x$;

б) $2^x > \sqrt{x}$; г) $2^x \leqslant \sqrt{x}$.

○57.24. а) $\log_2 x < 6 - x$; в) $\log_2 x \geqslant 6 - x$;

б) $\log_3 x \geqslant x^3$; г) $\log_3 x < x^3$.

●57.25. а) $x^2 + 1 \geqslant \cos x$; в) $x^2 + 1 \leqslant \cos x$;

б) $\sin x \leqslant -\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^2 - 1$; г) $\sin x \geqslant -\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^2 - 1$.

Решите неравенство:

57.26. а) $9^{x+2} + 4 \cdot 3^{2x+2} \geqslant 4\frac{1}{3}$; б) $8^{x-2} + 3 \cdot 2^{3x-2} \leqslant 24\frac{1}{2}$.

57.27. а) $4^{\sqrt{x}} - 9 \cdot 2^{\sqrt{x}} + 8 < 0$; б) $9^{\sqrt{x}} - 10 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 9 < 0$.

●57.28. а) $(x - 2)\log_4 (x + 2) \geqslant 0$; б) $(3 - x)\sqrt{\log_3 (x + 5)} \leqslant 0$.

●57.29. а) $(2^x - 3)(3x - 4) \leqslant 0$; б) $(3\log_3 x - 1)(3x - 4) \geqslant 0$.

●57.30. а) $(x + 3)\log_{\frac{1}{7}} x < 0$; в) $\dfrac{e^{3x-1} - 1}{x + 8} > 0$;

б) $(x - 5)\sqrt{x + 1} < 0$; г) $x\sqrt{x + 7} < 0$.

●57.31. а) $(x^2 - 2x)(\operatorname{tg}^2 x + 2^{x+1}) \leqslant 0$;

б) $(x^2 - 4x)(\operatorname{ctg}^2 x + 3^{x-1}) \leqslant 0$.

●57.32. а) $\sqrt{\sin x - 1} \leqslant 4 - x^2$; б) $\sqrt{\cos x - 1} \geqslant x^2 - 49$.

●57.33. а) $6\log_3 |x - 1| \leqslant 14 + 2x - x^2$;

б) $\log_2 (x^2 + x - 10) > 25 - 2x - 2x^2$.

§ 58. Уравнения и неравенства с двумя переменными

Постройте график уравнения:

58.1. а) $x^2 = 1$; в) $x^2 - 2x + 1 = 0$;

б) $y^2 = 9$; г) $y^2 - 6y + 8 = 0$.

58.2. а) $x = y$; в) $x + y = 2$;

б) $3x - 4y = 12$; г) $2y - x - 4 = 0$.

Постройте график уравнения:

○58.3. а) $x^2 - 3xy = 0$; в) $xy - 2y^2 = 0$;

б) $(x - 1)(y + 5) = 0$; г) $xy - 5x + y = 5$.

○58.4. а) $x^2 - y^2 = 0$; в) $x^2 + 2xy + y^2 = 0$;

б) $x^2 + 7xy - 18y^2 = 0$; г) $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$.

Постройте график уравнения:

○58.5. а) $\frac{x}{y} = 1$; в) $\frac{x - y}{x + y - 2} = 0$;

б) $\frac{2x + 3y - 5}{x + y} = 0$; г) $\frac{2x^2 - 4x - 2xy + 3y - 5}{x - y} = 2x$.

●58.6. а) $|x| + |y| = x + y$; в) $|x| + |y| = x - y$;

б) $|x| + |y| = y - x$; г) $|x| + |y| = -x - y$.

○58.7. а) $y = \sqrt{4 - x^2}$; в) $y = -\sqrt{4 - x^2}$;

б) $|y| = \sqrt{4 - x^2}$; г) $x = \sqrt{4 - y^2}$.

○58.8. а) $y = \sqrt{1 - x^2}$; в) $y + 2 = -\sqrt{1 - x^2}$;

б) $|y| = -\sqrt{1 - (x - 1)^2}$; г) $|y| = -\sqrt{1 - x^2} + 3$.

●58.9. а) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$;

б) $(x - 1)^2 + (|y| - 2)^2 = 16$;

в) $(|x| - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$;

г) $(|x| - 1)^2 + (|y| - 2)^2 = 16$.

●58.10. Постройте график уравнения и вычислите площадь фигуры, которая ограничена этим графиком:

а) $2|x| + 3|y| = 6$; б) $0,5|x| + \frac{1}{3}|y| = 2$.

Решите уравнение в целых числах:

○58.11. а) $x + 2y = 7$; б) $5x + y = 17$.

○58.12. а) $7x + 2y = 1$; б) $7x - 12y = 1$.

●58.13. а) $x^2 - 5xy + 6y^2 = 2$; б) $x^2 + 2xy - 8y^2 = 7$.

Постройте множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих неравенству:

58.14. а) $x \leqslant 5$; б) $x > -4$; в) $y \geqslant -3$; г) $y < 2$.

58.15. а) $x + 2y \leqslant 3$; б) $x - y > -4$; в) $3x + 2y \geqslant -5$; г) $x - 3y < 4$.

Постройте на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств:

○58.16. а) $\begin{cases} x + y \geqslant 3, \\ 2x - 3y \leqslant 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y \geqslant 1, \\ x + y \leqslant 1, \\ x \leqslant 2y; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - 2y \geqslant 3, \\ x + 3y \leqslant -2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - y \geqslant 2x, \\ x + y \leqslant 3y, \\ 5x \leqslant 2y - 7. \end{cases}$

Постройте множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих неравенству:

●58.17. а) $2|x - 3| + 2x - 3y \leqslant 0$; б) $x - 3 + |y + 2| \geqslant 2x + 5$.

●58.18. а) $|x + y| + 2x - y \geqslant 3$; б) $\dfrac{|x + y|}{x + y}x + |x + y| + y \leqslant 4$.

●58.19. а) $\sqrt{3x - y - 1} < \sqrt{2x + y - 1}$;

б) $\sqrt{1 - y} \leqslant \sqrt{1 - 2x^2}$;

в) $\sqrt{x + y - 1} > \sqrt{2x - y}$;

г) $\sqrt{y^2 - 1} \geqslant \sqrt{2x - 1}$.

○58.20. а) $xy \leqslant 2$; б) $y < \dfrac{2}{|x|}$; в) $|x| \cdot y < 2$; г) $|x| < \dfrac{2}{y}$.

●58.21. а) $|x| + |y| \leqslant 4$; б) $2|x| + 3|y| \leqslant 6$.

●58.22. а) $\dfrac{4 - x^2}{2x + 3y - 6} \geqslant 0$; б) $\dfrac{x^2 + y^2 - 4}{|x| + |y| - 2} \leqslant 0$.

○58.23. Найдите площадь фигуры, заданной системой неравенств:

а) $\begin{cases} x \leqslant 9, \\ y \leqslant 0, \\ 2x + 5y \geqslant 10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y \leqslant 12, \\ y - x \leqslant 12, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$

●58.24. Случайным образом выбирают одно из решений системы неравенств $\begin{cases}|x - y| \leqslant 2,\\ |x + y| \leqslant 2.\end{cases}$

Найдите вероятность того, что выбранная точка расположена:

а) ниже прямой $y = 1$;
б) выше прямой $y = 0{,}5$;
в) правее прямой $x = 1$;
г) выше параболы $y = x^2$.

§ 59. Системы уравнений

Решите систему уравнений методом подстановки:

○59.1. а) $\begin{cases}x + y = 3,\\ x^2 + 2y^2 - xy + 2x - 3y = 3;\end{cases}$

б) $\begin{cases}x + y = 5,\\ x^3 + y^3 = 35;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\sqrt{7 - 6x - y^2} = y + 5,\\ y = x - 1;\end{cases}$

г) $\begin{cases}x + 2y = 1,\\ 2x^2 + 3xy - 3y^2 = 6.\end{cases}$

○59.2. а) $\begin{cases}3x = y + 1,\\ 7^{y - 2x + 2} = 7^{y - 4x + 1} + 6;\end{cases}$

б) $\begin{cases}x = 2y,\\ \log_{\frac{1}{3}}(2y + x) + \log_{\frac{1}{3}}(x - y + 1) = \log_3 \dfrac{1}{y + 1}.\end{cases}$

Решите систему уравнений методом алгебраического сложения:

○59.3. а) $\begin{cases}3x + 2y = 1,\\ x - y = -3;\end{cases}$

в) $\begin{cases}x + y^2 = 2,\\ 2y^2 + x^2 = 3;\end{cases}$

б) $\begin{cases}2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 1,\\ 3\sqrt{x} - 2\sqrt{y} = 4;\end{cases}$

г) $\begin{cases}\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} = 3,\\ 3\sqrt[3]{x} - 5\sqrt[4]{y} = 1.\end{cases}$

○59.4. а) $\begin{cases} \log_2 x - \log_3 y = -5, \\ 2\log_2 x + 3\log_3 y = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2^{x+2y} - \sqrt{2x+y} = 6, \\ 3\sqrt{2x+y} - 2^{x+2y} = -2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \cos x + \cos 2y = -0{,}5, \\ 3\cos 2y - \cos x = 2{,}5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2\sin 2x + \operatorname{tg} 3y = 2, \\ 6\sin 2x - 2\operatorname{tg} 3y = 1. \end{cases}$

Решите систему уравнений методом введения новых переменных:

○59.5. а) $\begin{cases} \dfrac{5}{3x-y} + \dfrac{3}{x-3y} = -2, \\ \dfrac{15}{3x-y} + \dfrac{2}{x-3y} = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{3}{x+y} + \dfrac{6}{x-y} = -1, \\ \dfrac{5}{x+y} + \dfrac{9}{x-y} = -2. \end{cases}$

○59.6. а) $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ \log_6^2 xy + 1 = 2\log_6 xy \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{x}\cdot\sqrt{y} = 10 - 3\sqrt[4]{xy}, \\ 2x - 5y = 6. \end{cases}$

●59.7. а) $\begin{cases} 3\sqrt[3]{x+y} = \log_2 16x^2, \\ \log_2 x^2 + 2\sqrt[3]{x+y} = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3^{x-y} - 7|2y - x| = 2, \\ |2y - x| - 3^{x-y-1} = -2. \end{cases}$

○59.8. Применяя графический метод, определите, сколько решений имеет система уравнений:

а) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = \cos x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = \sin x, \\ y = 0{,}1x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = 2 - x^2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y + 2 = \sqrt{x+4}, \\ y + x^3 = 0. \end{cases}$

Решите графически систему уравнений:

○59.9. а) $\begin{cases} y + x = 3, \\ xy = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = x(x-4), \\ y + 8 = 2x. \end{cases}$

●59.10. а) $\begin{cases} y\cdot 2^{x+1} = 1, \\ \sqrt[3]{x+2} = y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = 2^{x-1}, \\ |x - 3| = y + 1. \end{cases}$

Решите систему уравнений:

O59.11. а) $\begin{cases} y + 2x = 3, \\ x^2 + y^2 = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{y}{9} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x, \\ y = \log_2 x. \end{cases}$

O59.12. а) $\begin{cases} 2\sin(x + y) - 3\cos(x - y) = 5, \\ 7\cos(x - y) + 5\sin(x + y) = -2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^4 - y^4 = 15, \\ x^4 + y^4 = 17. \end{cases}$

O59.13. а) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{y - x}{2x}} - \sqrt{\dfrac{x}{x + y}} = \dfrac{1}{2}, \\ 16\sqrt{\dfrac{x}{x + y}} - 7\sqrt{\dfrac{y - x}{2x}} = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2^{y + x} - 3^{x - y} = 1, \\ 2^{x + y} + 3^{x - y} = 3. \end{cases}$

O59.14. а) $\begin{cases} \sqrt{x + 1} - y = 2, \\ \log_7 (4 - x) = y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y + x = 1, \\ 2^{x - y} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-1} \cdot \dfrac{8^{\frac{2}{3}}}{2}. \end{cases}$

O59.15. а) $\begin{cases} (2x + y)(x + 3y) = 48, \\ \dfrac{2x + y}{x + 3y} = \dfrac{3}{4}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{x - 3}{y + 2} = 4, \\ (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 17. \end{cases}$

O59.16. а) $\begin{cases} \sqrt{x - y} + \sqrt{x + 3y} = 4, \\ 2x - y = 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 6x + 2y = 10, \\ \sqrt{2x + y} + \sqrt{6x - 3y} = 2. \end{cases}$

Решите систему уравнений:

○59.17. а) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 5, \\ xy = 216; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = 1, \\ \sqrt{xy} = 4. \end{cases}$

○59.18. а) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x + 3y}{y + 5}} + 2 = 3\sqrt{\dfrac{y + 5}{x + 3y}}, \\ xy + 2x = 13 - 4y; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + 4x - y^2 - 3y = 0, \\ \sqrt{\dfrac{x + y}{x - y}} + 3\sqrt{\dfrac{x - y}{x + y}} = 4. \end{cases}$

○59.19. а) $\begin{cases} 2^x \cdot 0{,}25^{-y} = 512, \\ \sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 9^x \cdot 3^{y-3} = 729, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1. \end{cases}$

○59.20. а) $\begin{cases} \log_{13}(x^2 + y^2) = 0{,}5\log_\pi \pi^2, \\ \log_3 x - 1 = \log_3 2 - \log_3 y; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \log_7(x + y) = 4\log_7(x - y), \\ \log_7(x + y) = 5\log_7 3 - \log_7(x - y). \end{cases}$

○59.21. а) $\begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{1}{2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \cos x + \cos y = 0{,}5, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = 1{,}75. \end{cases}$

Решите систему трех уравнений с тремя переменными:

●59.22. а) $\begin{cases} x + 2y - 3z = -3, \\ 2x - 3y + z = 8, \\ -x + y - 5z = -8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - 5y + z = -13, \\ x + 3y - 2z = 5, \\ 2x - 2y + 5z = -6. \end{cases}$

●59.23. а) $\begin{cases} x + y = -1, \\ x - z = 2, \\ xy + xz + yz = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y + 2z = 0, \\ x + 2y + z = 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 5. \end{cases}$

●59.24. Составьте уравнение параболы $y = ax^2 + bx + c$, если известно, что она проходит через точки M, P, Q:

а) $M(1; -2)$, $P(-1; 8)$, $Q(2; -1)$;

б) $M(-1; 6)$, $P(2; 9)$, $Q(1; 2)$.

●59.25. Сумма цифр задуманного трехзначного числа равна 8, а сумма квадратов его цифр равна 26. Если к задуманному числу прибавить 198, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите задуманное число.

●59.26. Три целых числа в заданном порядке образуют конечную геометрическую прогрессию. Если второе число увеличить на 6, то получится конечная арифметическая прогрессия. Если после этого третье число увеличить на 48, то снова получиться геометрическая прогрессия. Найдите три исходных числа.

●59.27. Три бригады, работая вместе, выполняют норму по изготовлению подшипников за некоторое время. Если бы первые две бригады работали в 2 раза медленнее, а третья бригада — в 4 раза быстрее, чем обычно, то норма была бы выполнена за то же время. Известно, что первая и вторая бригады при совместной работе выполняют норму в 2 раза быстрее, чем вторая бригада совместно с третьей. Во сколько раз первая бригада производит подшипников за 1 ч больше, чем третья?

§ 60. Задачи с параметрами

○60.1. При каких значениях параметра m уравнение $mx - x + 1 = m^2$:

а) имеет ровно один корень;

б) не имеет корней;

в) имеет более одного корня?

○60.2. При каких значениях параметра b уравнение $b^2x - x + 2 = b^2 + b$:

а) имеет ровно один корень;

б) не имеет корней;

в) имеет более одного корня?

○60.3. Решите уравнение (относительно x):

а) $a^2x - 4x + 2 = a$; б) $\frac{x}{a} + x - 1 = a$.

○60.4. Решите неравенство (относительно x):

а) $mx - x + 1 \geqslant m^2$; б) $b^2x - x + 1 > b$.

○60.5. Решите неравенство (относительно x):

а) $b^2x - bx \geqslant b^2 + b - 2$; б) $\frac{x}{a} + x \leqslant a + 1$.

○60.6. При каких значениях a уравнение $ax^2 + 4x - a + 5 = 0$:

а) имеет два различных корня;

б) имеет ровно один корень;

в) не имеет действительных корней?

○60.7. При каком значении a:

а) прямая $y = 6x + a$ касается графика функции $y = x^2$;

б) прямая $y = 4x$ имеет только одну общую точку с графиком функции $y = x^2 + a$?

○60.8. При каких значениях b графики функций имеют общие точки:

а) $y = x^2 - 4x + 2$ и $y = -2x + b$;

б) $y = x^2 + 6x + 7$ и $y = 2x + b$?

○60.9. При каких значениях a система уравнений имеет решения:

а) $\begin{cases} y = 2x^2 - 5x + 1, \\ y = 3x + a; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = 3x^2 - 4x - 2, \\ y = -10x + a? \end{cases}$

○60.10. При каких значениях a неравенство $ax^2 + 4x - 3 + a > 0$:

а) выполняется при любых x;

б) не имеет решений?

○60.11. При каких значениях a:

а) ось симметрии параболы $y = 2x^2 - 3ax + 2$ пересекает ось абсцисс левее точки $(-3; 0)$;

б) ось симметрии параболы $y = 5x^2 - 2ax + 2$ пересекает ось абсцисс правее точки $(4; 0)$?

●60.12. Решите неравенство (относительно x):

а) $\sqrt{x-2}\,(x-a) \geqslant 0$; б) $(6-x)\sqrt{x-a} > 0$.

●60.13. Найдите наименьшее целочисленное значение параметра b, при котором уравнение имеет два корня:

а) $x^2 - 2bx + b^2 - 4b + 3 = 0$;

б) $x^2 + 2(b - 2)x + b^2 - 10b + 12 = 0$.

●**60.14.** При каких значениях a:

а) вершина параболы $y = (3a + 1)x^2 + 2x - 5$ лежит внутри четвертой координатной четверти;

б) вершина параболы $y = 3x^2 + (4a - 1)x + 3$ лежит внутри первой координатной четверти?

●**60.15.** При каких значениях $a > 0$:

а) уравнение $(\log_3 a)x^2 - (2\log_3 a - 1)x + \log_3 a - 2 = 0$ имеет единственный корень;

б) уравнение $(\log_4 a)x^2 + (2\log_4 a + 1)x + \log_4 a + 2 = 0$ не имеет корней?

●**60.16.** Найдите, при каких значениях параметра a не имеет корней уравнение:

а) $48 \cdot 4^x + 27 = a + a \cdot 4^{x+2}$;

б) $9^x + 2a \cdot 3^{x+1} + 9 = 0$.

●**60.17.** При каких значениях a:

а) уравнение $5^{2x} - 3 \cdot 5^x + a - 1 = 0$ имеет единственный корень;

б) уравнение $0{,}01^x - 2(a + 1) \cdot 0{,}1^x + 4 = 0$ не имеет действительных корней?

●**60.18.** При каких значениях a имеет ровно 3 корня уравнение:

а) $x(x + 3)^2 + a = 0$; б) $x^3 - 12x + 1 = a$?

●**60.19.** При каких значениях a:

а) уравнение $x^4 - 8x^2 + 4 = a$ не имеет корней;

б) уравнение $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 = a$ имеет не менее трех корней?

ОТВЕТЫ

ГЛАВА 1

§ 1

1.3. а) $\dfrac{2x^2-5x-2}{3x-3}$; б) $\dfrac{2x^6-3x^3-4}{3-3x^3}$; в) $\dfrac{2+3x-4x^2}{3x+3x^2}$;

г) $\dfrac{8x^4+24x^3+64x^2+69x+61}{6x^2+9x+18}$. **1.6.** а) $2 \leqslant x < 4$; б) $2 < x < 2{,}5$, $2{,}5 < x \leqslant 3$;

в) $x \leqslant \dfrac{1}{2}$, $2 \leqslant x < 5$ г) $6 \leqslant x < 7$, $7 < x < 10$. **1.13.** а) $D(f): x \neq \pm 1{,}75$,

$E(f) = \left(-\infty; -\dfrac{1}{49}\right] \cup (0; +\infty)$; б) $D(f) = (-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$, $E(f) = [0; +\infty)$;

в) $D(f): x \neq \pm 0{,}6$, $E(f) = (-\infty; 0) \cup \left[\dfrac{1}{9}; +\infty\right)$; г) $D(f) = [-6; 3]$, $E(f) = [0; 4{,}5]$.

1.16. а) 1; б) 4; в) 3; г) 1. **1.17.** а) 5; б) 1; в) 6; г) 0. **1.18.** в) $D(f) = (0; +\infty)$; г) $E(f) = [1; +\infty)$.

§ 2

2.3. а), г) Возрастает; б), в) убывает. **2.4.** а), г) Возрастает; б), в) убывает. **2.5.** а), г) Возрастает; б), в) убывает. **2.6.** а), г) Ограничена снизу; б), в) ограничена сверху. **2.7.** а), г) Ограничена снизу и сверху; б), г) ограничена снизу. **2.10.** а) −1; 5; б) $y_{\text{наиб}} = 3$; в) −38,5; 1,5; г) −2; 58.

§ 3

3.2. а) $y = \dfrac{3x+1}{2x-1}$; б) $y = \dfrac{4-x}{x+3}$; в) $y = \dfrac{3-x}{5x+2}$; г) $y = \dfrac{x+5}{2-2x}$. **3.3.** а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = x^2$, $x \geqslant 0$; в) $y = 1 - \sqrt{x}$; г) $y = -x^2$, $x \geqslant 0$. **3.4.** а) $y = \sqrt[3]{x}$; б) $y = 2 + \sqrt[3]{x}$; в) $y = \sqrt[3]{1-x}$; г) $y = \sqrt[3]{x+1} - 3$. **3.5.** а), в) Не существует; б) $y = -2 - \sqrt{x+12}$; г) $y = \sqrt{7-x} + 1$.

ГЛАВА 2

§ 4

4.17. а) IV; б) II; в) II; г) III. **4.18.** а) IV; б) I; в) II; г) III. **4.19.** а) $2\pi k < t < \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k$; б) $-\pi + 2\pi k < t < \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k$;

в) $\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k < t < 2\pi + 2\pi k$; г) $\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k < t < \pi + 2\pi k$.

4.20. а) $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k < t < \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k$; б) $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k < t < \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k$;

в) $\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k < t < \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k$; г) $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k < t < \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$.

§ 5

5.10. а) $-$, $+$; б) $-$, $+$; в) $+$, $-$; г) $+$, $-$. **5.11.** а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < t < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$;

б) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k < t < \frac{5\pi}{3} + 2\pi k$; в) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k < t < \frac{\pi}{3} + 2\pi k$;

г) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k < t < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$.

5.12. а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k < t < \frac{7\pi}{4} + 2\pi k$; б) $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k < t < \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$;

в) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$; г) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{6} + 2\pi k$.

5.13. а) $2\pi k < t < \pi + 2\pi k$; б) $-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k < t < \frac{\pi}{6} + 2\pi k$;

в) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < t < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$; г) $-\pi + 2\pi k < t < 2\pi k$.

5.14. а) $-\frac{5\pi}{4} + 2\pi k < t < \frac{\pi}{4} + 2\pi k$; б) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k < t < \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$;

в) $\frac{4\pi}{3} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{5\pi}{3} + 2\pi k$; г) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$.

§ 6

6.6. а) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1}{2}$; б) 0; в) 1; г) $\frac{\sqrt{6}}{8}$. **6.7.** а) 1; б) 0. **6.9.** а) $\frac{3}{2}$; б) -3; в) 0; г) 4,5. **6.12.** а) $\sin^2 t$; б) $-\sin^2 t$; в) $-\cos^2 t$; г) $\operatorname{tg}^2 t$. **6.13.** а) -1; б) $-\frac{1}{2}$; в) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **6.14.** а) 0,5; б) 1; в) 0; г) 1. **6.15.** а) -2; 2; б) -1; 7; в) -3; 3; г) -2; 8. **6.20.** а) $+$; б) $-$; в) $-$; г) $-$. **6.21.** а) $-$; б) $+$; в) $-$; г) $+$. **6.22.** а) $-$; б) $-$; в) $-$; г) $+$. **6.23.** а) $-$; б) $+$; в) $-$; г) $-$. **6.24.** а) $-$; б) $-$; в) $+$; г) $-$. **6.25.** а) $-$; б) $+$; в) $+$; г) $+$. **6.26.** а) $+$; б) $-$. **6.27.** а) 0; б) 1. **6.28.** а) $\frac{\sqrt{2} + 1}{2}$; б) 1. **6.29.** а) 1; б) 0. **6.30.** а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k$; $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$; б) $\frac{5\pi}{4} + 2\pi k$; $\frac{7\pi}{4} + 2\pi k$; в) $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$; г) $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$. **6.31.** а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$; $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$; б) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$.

6.32. а) $\frac{\pi}{2}+\pi k$; б) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$; в) πk; г) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$. **6.33.** а) Да; б) нет; в) да; г) нет. **6.34.** а) $a > b$; б) $a < b$; в) $a > b$; г) $a > b$. **6.35.** а) +; б) −; в) −; г) −.

6.36. а) $\sin\frac{4\pi}{3}$, $\sin\frac{7\pi}{6}$, $\sin\frac{\pi}{7}$, $\sin\frac{\pi}{5}$, $\sin\frac{2\pi}{3}$; б) $\cos\frac{5\pi}{6}$, $\cos\frac{5\pi}{4}$, $\cos\frac{\pi}{3}$, $\cos\frac{7\pi}{4}$, $\cos\frac{\pi}{8}$. **6.37.** а) cos 4, sin 3, cos 5, sin 2; б) cos 3, cos 4, cos 7, cos 6; в) sin 4, sin 6, sin 3, sin 7; г) cos 3, sin 5, sin 4, cos 2.

6.38. а) cos 1, sin 1, 1, tg 1; б) ctg 2, cos 2, sin 2, 2.

6.39. а) $2\pi k < t < \pi + 2\pi k$; б) $-\frac{4\pi}{3}+2\pi k < t < \frac{\pi}{3}+2\pi k$; в) $-\pi+2\pi k < t < 2\pi k$; г) $\frac{\pi}{3}+2\pi k < t < \frac{2\pi}{3}+2\pi k$.

6.40. а) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k < t < \frac{\pi}{2}+2\pi k$; б) $\frac{\pi}{4}+2\pi k < t < \frac{7\pi}{4}+2\pi k$; в) $\frac{\pi}{2}+2\pi k < t < \frac{3\pi}{6}+2\pi k$; г) $-\frac{\pi}{4}+2\pi k < t < \frac{\pi}{4}+2\pi k$.

6.41. а) $-\frac{\pi}{4}+2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{5\pi}{4}+2\pi k$; б) $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{5\pi}{6}+2\pi k$; в) $\frac{5}{4}\pi+2\pi k < t < \frac{7\pi}{4}+2\pi k$; г) $\frac{5\pi}{6}+2\pi k < t < \frac{7\pi}{6}+2\pi k$.

§ 7

7.7. а) $\cos t = -\frac{3}{5}$; $\operatorname{tg} t = -\frac{4}{3}$; $\operatorname{ctg} t = -\frac{3}{4}$; б) $\cos t = \frac{12}{13}$; $\operatorname{tg} t = \frac{5}{12}$; $\operatorname{ctg} t = \frac{12}{5}$; в) $\cos t = 0{,}8$; $\operatorname{tg} t = -\frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg} t = -\frac{4}{3}$; г) $\cos t = -0{,}96$; $\operatorname{tg} t = \frac{7}{24}$; $\operatorname{ctg} t = \frac{24}{7}$. **7.8.** а) $\sin t = 0{,}6$; $\operatorname{tg} t = \frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg} t = \frac{4}{3}$; б) $\sin t = \frac{12}{13}$; $\operatorname{tg} t = -\frac{12}{5}$; $\operatorname{ctg} t = -\frac{5}{12}$; в) $\sin t = -0{,}8$; $\operatorname{tg} t = -\frac{4}{3}$; $\operatorname{ctg} t = -\frac{3}{4}$;

г) $\sin t = -\frac{7}{25}$; $\operatorname{tg} t = \frac{7}{24}$; $\operatorname{ctg} t = \frac{24}{7}$. **7.9.** а) $\sin t = \frac{3}{5}$; $\cos t = \frac{4}{5}$; $\operatorname{ctg} t = \frac{4}{3}$; б) $\sin t = -\frac{12}{13}$; $\cos t = -\frac{5}{13}$; $\operatorname{ctg} t = \frac{5}{12}$; в) $\sin t = \frac{3}{5}$; $\cos t = -\frac{4}{5}$; $\operatorname{ctg} t = -\frac{4}{3}$; г) $\sin t = -\frac{5}{13}$; $\cos t = \frac{12}{13}$; $\operatorname{ctg} t = -\frac{12}{5}$.

7.10. а) $\sin t = -\frac{5}{13}$; $\cos t = -\frac{12}{13}$; $\operatorname{tg} t = \frac{5}{12}$; б) $\sin t = \frac{24}{25}$; $\cos t = \frac{7}{25}$; $\operatorname{tg} t = \frac{24}{7}$; в) $\sin t = -\frac{12}{13}$; $\cos t = \frac{5}{13}$; $\operatorname{tg} t = -\frac{12}{5}$; г) $\sin t = \frac{15}{17}$; $\cos t = -\frac{8}{17}$; $\operatorname{tg} t = -\frac{15}{8}$. **7.11.** а) 0, 2; б) $s_{\text{наиб}} = 1$, $s_{\text{наим}}$ не существует; в) 2, 4. г) $s_{\text{наиб}} = 4$, $s_{\text{наим}}$ не существует; **7.12.** а) $\frac{1}{\sin t}$; б) 0; в) $-\sin^2 t$; г) $\frac{1}{\sin^2 t}$. **7.13.** а) $\frac{2}{\sin t}$; б) $\sin^2 t$; в) $\frac{2}{\cos t}$; г) $\operatorname{tg} t$. **7.14.** а) $\frac{1}{\sin^2 t}$; б) $\operatorname{ctg}^6 t$.

7.17. а) $-\frac{3}{4}$; б) $\frac{12}{5}$. **7.18.** а) $-\frac{12}{13}$; б) $-1{,}4$. **7.19.** 1,4.

§ 8

8.7. sin 160°, sin 40°, sin 120°, sin 80°. **8.8.** cos 160°, cos 120°, cos 80°, cos 40°. **8.9.** sin 210°, sin 20°, sin 400°, sin 110°. **8.12.** а) 6, $6\sqrt{3}$, $18\sqrt{3}$, 6; б) $3\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, 9, 3; в) 2, $2\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$, 2; г) 30, $30\sqrt{3}$, $450\sqrt{3}$, 30. **8.13.** $2R\cos\alpha$. **8.15.** $BC = 8$ см, $AC = 4(\sqrt{3} + 1)$ см, $S = 8(\sqrt{3} + 1)$ см². **8.16.** $\frac{25(3 + \sqrt{3})}{6}$ см².

§ 9

9.7. а) $-1{,}5$; б) 2; в) $-\sqrt{2}$; г) -1. **9.8.** а) 0; б) $2\cos t$. **9.9.** а) $\operatorname{ctg}\alpha$; б) $\cos t$; в) $\operatorname{ctg}\alpha$; г) $-\cos t$. **9.10.** а) -1; б) $-\frac{1}{\cos t}$. **9.12.** а) $2\pi k$; б) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; в) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$; г) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$. **9.13.** а) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$; б) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

9.14. а) Корней нет; б) t — любое действительное число.

§ 10

10.3. а) 0; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) 1; г) -1. **10.5.** а) Да; б) да; в) да; г) нет. **10.6.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1; б) -1, 1; в) -1, 1; г) -1, $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **10.11.** а) $-\pi$; б) 0; в) 0; г) π. **10.12.** а) $\pm\frac{\pi}{2}$; 0; б) $\frac{\pi}{2}$. **10.13.** а) π; б) 0. **10.17.** а) -1, 0, 1, π. **10.18.** а) $-0{,}5$, 0, $\sin 1$.

§ 11

11.4. а) $-\sqrt{2} - 1$; б) 1. **11.7.** а) $-\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $y_{\text{наиб}} = 1$; в) -1, 1; г) -1, 1. **11.9.** а) $-\frac{\pi}{2}$; б) 0; в) 0; г) $\frac{\pi}{2}$. **11.10.** а) 0; б) $\frac{\pi}{2}$; в) π; г) 0.

§ 12

12.9 а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$; б) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$; в) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k$; $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$; г) $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$.

§ 13

13.5. а) $-3\sin x$; б) $6\sin x$; в) $6\sin x + 1$; г) 0. **13.6.** а) $-0{,}5\cos x$; б) $-\cos x$; в) $-0{,}5\cos x$; г) 0.

13.9. а) $y = \begin{cases} x^2, \text{ если } x < 0, \\ \frac{1}{2}\sin x, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant \pi; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} 1{,}5\cos x, \text{ если } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ x - \frac{\pi}{2}, \text{ если } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

13.14. а) -1; 0; б) $y_{\text{наиб}} = 1$; в) -1; 1; г) -1, 1. **13.15.** а) -1, 1; б) -1, 1; в) -1, 1; г) -1, 1. **13.16.** а) $\cos\frac{x}{3}$; б) $3\cos\frac{x}{3}$; в) $\cos x$; г) 0. **13.17.** а) $-\sin 2x$; б) $2\sin 2x$; в) $-\sin 6x$; г) 0. **13.20.** а) $y = \begin{cases} -x, \text{ если } x \leqslant 0, \\ \sin 2x, \text{ если } x > 0; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} \cos 3x, \text{ если } x \leqslant \frac{\pi}{3}, \\ -1, \text{ если } x > \frac{\pi}{3}; \end{cases}$ в) $y = \begin{cases} \sin 2x, \text{ если } x \leqslant 0, \\ 2\cos x, \text{ если } x > 0; \end{cases}$

г) $y = \begin{cases} -2\sin x, \text{ если } x \leqslant 0, \\ \cos\frac{x}{2}, \text{ если } x > 0. \end{cases}$

§ 14

14.3. а) $-\frac{\pi}{3} + \pi k$; б) $\frac{\pi}{4} + \pi k$; в) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$; г) πk. **14.6.** а) $\frac{\pi}{4} + \pi k$; б) $\frac{\pi}{3} + \pi k$; в) $\frac{2\pi}{3} + \pi k$; г) $\frac{\pi}{2} + \pi k$. **14.7.** а) Ни четная, ни нечетная; б) нечетная; в) четная; г) нечетная. **14.8.** $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{3}$. **14.9.** $-\frac{7}{5}$; $-\frac{5}{7}$. **14.10.** а) –; б) –; в) +; г) –.

ГЛАВА 3

§ 15

15.3. а) $\frac{3\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{6}$; в) π; г) $\frac{\pi}{3}$. **15.4.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) 0; г) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **15.8.** а) 0; б) $\frac{\pi}{3}$. **15.9.** а) $-1 \leqslant x \leqslant 1$; б) $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$; в) $0 \leqslant x \leqslant 2$; г) $1 \leqslant x \leqslant 2$. **15.10.** а) Нет; б) да; в) да; г) нет. **15.12.** а) $2\pi k$; б) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$. **15.13.** а) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$; $\arccos\left(\frac{-1}{3}\right) + 2\pi k$; б) $\pm\arccos\frac{1}{5} + 2\pi k$. **15.14.** а) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$; б) $\frac{8\pi}{3}$, $\frac{10\pi}{3}$; в) $\pm\frac{\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$; г) $-\pi$, π. **15.15.** а) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$; б) $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{8\pi}{3}$; в) $\frac{\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$, $\frac{15\pi}{4}$; г) $\pm\frac{3\pi}{4}$. **15.17.** а) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k < t < \frac{\pi}{3} + 2\pi k$; б) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k < t < \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$; в) $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$;
г) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k < t < \frac{5\pi}{3} + 2\pi k$.

15.18. а) $\arccos\frac{2}{3} + 2\pi k < t < 2\pi - \arccos\frac{2}{3} + 2\pi k$;

б) $-\arccos\left(-\frac{1}{7}\right) + 2\pi k < t < \arccos\left(-\frac{1}{7}\right) + 2\pi k$;

в) $-\arccos\frac{2}{3} + 2\pi k < t < \arccos\frac{2}{3} + 2\pi k$;

г) $\arccos\left(-\frac{1}{7}\right) + 2\pi k < t < 2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{7}\right) + 2\pi k$.

15.19. а) $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi k \leqslant t \leqslant 2\pi - \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi k$;

б) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k < t < \frac{\pi}{3} + 2\pi k$; $\arccos\frac{1}{3} + 2\pi k < t < 2\pi - \arccos\frac{1}{3} + 2\pi k$;

в) $-\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi k < t < \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi k$;

г) $-\arccos\frac{1}{3} + 2\pi k \leqslant t \leqslant -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$; $\frac{\pi}{3} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \arccos\frac{1}{3} + 2\pi k$.

15.20. а) $\frac{\pi}{3} + \pi k < t < \frac{2\pi}{3} + \pi k$; б) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < t < -\arccos\frac{1}{3} + 2\pi k$;

$\arccos\frac{1}{3} + 2\pi k < t < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; в) $-\arccos\frac{1}{3} + \pi k < t < \arccos\frac{1}{3} + \pi k$;

г) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k < t < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$; $-\arccos\frac{1}{3} + 2\pi k < t < \arccos\frac{1}{3} + 2\pi k$.

15.21. а) $\frac{4}{5}$; б) 0,6. **15.22.** а) $-\frac{12}{5}$; б) $\frac{4}{3}$.

§ 16

16.3. а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{2}$; в) $\frac{\pi}{12}$; г) $-\frac{\pi}{3}$. **16.4.** а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{5\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $\frac{7\pi}{12}$.

16.9. а) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$; б) $-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$; в) $-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$; г) $-\frac{11\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$.

16.10. а) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}$; б) $-\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$; в) $-\frac{5\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$; г) $-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$. **16.11.** а) $-1 \leqslant x \leqslant 1$; б) $2 \leqslant x \leqslant 3$; в) $-2 \leqslant x \leqslant 2$; г) $-2 \leqslant x \leqslant -\sqrt{2}$, $\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 2$.

16.12. а) Да; б) нет; в) нет; г) да. **16.13.** а) $(-1)^n\frac{\pi}{3} + \pi k$, $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$;

б) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $(-1)^k\arcsin\frac{2}{3} + \pi k$; в) $(-1)^k\arcsin\frac{3}{4} + \pi k$, πk; г) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$.

16.14. а) $(-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k$, $(-1)^{k+1}\arcsin\frac{2}{3} + \pi k$; б) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

16.15. а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k < t < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$; б) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k < t < \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$;

в) $-\frac{4\pi}{3} + 2\pi k < t < \frac{\pi}{3} + 2\pi k$; г) $\frac{7\pi}{6} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{11\pi}{6} + 2\pi k$.

16.16. а) $-\pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi k < t < \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi k$;

б) $-\arcsin 0{,}6 + 2\pi k \leqslant t \leqslant \pi + \arcsin 0{,}6 + 2\pi k$;

в) $\arcsin\frac{1}{3} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi k$;

г) $\pi + \arcsin 0{,}6 + 2\pi k < t < 2\pi - \arcsin 0{,}6 + 2\pi k$.

16.17. а) $\pi + \arcsin 0{,}8 + 2\pi k < t < 2\pi - \arcsin 0{,}8 + 2\pi k$;

б) $-\arcsin 0{,}8 + 2\pi k \leqslant t \leqslant \pi + \arcsin 0{,}8 + 2\pi k$.

16.18. а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k < t < \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi k$; $\pi - \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi k < t < \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$;

б) $\arcsin\frac{2}{3} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \pi - \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi k$; $\frac{7\pi}{6} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{11\pi}{6} + 2\pi k$.

16.19. а) $\frac{12}{13}$; б) $\frac{3}{4}$; в) $\frac{15}{17}$; г) $-\frac{3}{4}$.

§ 17

17.4. а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{7\pi}{12}$; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $-\frac{\pi}{6}$. **17.8.** а) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k$; б) πk; $-\operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \pi k$;

в) $\pm\operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \pi k$; г) πk; $\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \pi k$. **17.9.** а) $\frac{\pi}{4} + \pi k$; $\operatorname{arctg} 5 + \pi k$;

б) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$; $\operatorname{arctg} 3 + \pi k$. **17.10.** а) $\frac{\pi}{3} + \pi k$; б) $\frac{\pi}{3} + \pi k$; в) $\frac{\pi}{6} + \pi k$; г) $\frac{3\pi}{4} + \pi k$.

§ 18

18.1. а) $(-1)^n\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$; б) $\pm 2\pi + 6\pi n$; в) $(-1)^n\frac{2\pi}{3} + 4\pi n$; г) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$.

18.2. а) $(-1)^{n+1}\frac{3\pi}{4} + 3\pi n$; б) $\pm\frac{5\pi}{12} + 2\pi n$; в) $-\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4}$; г) $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n$.

18.3. а) $\frac{2\pi}{3} + 4\pi k$; $4\pi k$; б) $\frac{\pi}{2} + 3\pi k$; в) $\frac{2\pi k}{3}$; $\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{3}$; г) $-\frac{2\pi}{3} + 4\pi k$.

18.4. а) $\frac{7\pi}{12} + \pi k$; б) $\pi + 2\pi k$; в) $8\pi k$; $\frac{-4\pi}{3} + 8\pi k$; г) $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$; $\frac{2\pi k}{3}$.

18.5. а) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$; б) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$; в) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$; $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$;

г) $\frac{4\pi}{3} + 2\pi k$; $\frac{5\pi}{3} + 2\pi k$. **18.6.** а) $(-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{3} + \pi k$;

б) $(-1)^{k+1}\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3} + \frac{\pi k}{2}$; в) $(-1)^k\arcsin\frac{1}{4} + \pi k$; г) $\pi + 4\pi k$; $(-1)^k\frac{\pi}{3} + 2\pi k$.

18.7. а) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$; $\pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi k$; б) $\pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}$; в) $\pi + 2\pi k$; г) $\pm\pi + 6\pi k$.

18.8. а) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi k$; в) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $(-1)^k\arcsin\frac{1}{5} + \pi k$; г) $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$.

18.9. а) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$; $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi k$; б) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$; $\frac{1}{2}\operatorname{arcctg} 5 + \frac{\pi k}{2}$;

в) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi k$; $-\operatorname{arctg} 2 + \pi k$; г) $\frac{3\pi}{2} + 2\pi k$; $2\operatorname{arcctg}\frac{5}{7} + 2\pi k$.

18.10. а) $-\frac{\pi}{3} + \pi k$; б) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$; в) $\operatorname{arctg} 3 + \pi k$; г) $-\frac{\pi}{6} + \pi k$. **18.11.** а) πk;

$-\frac{\pi}{4} + \pi k$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $-\frac{\pi}{6} + \pi k$; в) πk; $\operatorname{arctg} 3 + \pi k$; г) $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $\frac{\pi}{3} + \pi k$.

18.12. а) $\frac{\pi}{4} + \pi k$; $-\operatorname{arctg} 3 + \pi k$; б) $\frac{\pi}{4} + \pi k$; $\operatorname{arctg} 3 + \pi k$; в) $\frac{\pi}{4} + \pi k$;

$-\operatorname{arctg} 2 + \pi k$; г) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$; $\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \pi k$. **18.13.** а) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$;

б) $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi$; в) $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$; г) $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \pi$. **18.14.** а) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}$;

б) $-\frac{4\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}$. **18.15.** а) $\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{11\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}$;

б) $\pm\frac{\pi}{18}, \pm\frac{11\pi}{18}, \pm\frac{13\pi}{18}$; в) $-\frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}$; г) $\frac{3\pi}{16}, \frac{7\pi}{16}, \frac{11\pi}{16}, \frac{15\pi}{16}$.

18.16. а) $-\frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$; б) $0, 2\pi, 4\pi$. **18.17.** а) $-2\pi, 0, 2\pi, 4\pi$;

б) $\frac{11\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{7\pi}{4}$. **18.18.** а) $\frac{7\pi}{8}$; б) $-\frac{\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}$; в) $-\frac{\pi}{8}$; г) $-\frac{\pi}{8}$.

18.19. а) $\frac{\pi}{3}$; б) $0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}$; в) $-\frac{2\pi}{3}$; г) $-\frac{2\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}$. **18.20.** а) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + \pi k$;

б) $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$. **18.21.** а) $\frac{\pi}{4} + \pi k$; $-\operatorname{arctg} 2 + \pi k$; б) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$; $\operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \pi k$;

в) $\operatorname{arctg} 2 + \pi k$; $-\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi k$; г) $\frac{3\pi}{4} + \pi k$; $\operatorname{arcctg} \frac{3}{4} + \pi k$. **18.22.** а) $\pi + 2\pi k$; $\pm\frac{5\pi}{3} + 4\pi k$; б) $\frac{\pi}{3} + \pi k$; πk; в) $\frac{\pi k}{3}$; $\frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}$; г) $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$; $-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$.

18.23. а) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + \pi k$; б) $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$. **18.24.** а) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$; б) $\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}$; в) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$; г) $\frac{\pi}{51} + \frac{\pi k}{17}$. **18.25.** а) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi k}{2}$; $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \frac{\pi k}{2}$; б) $-\frac{1}{3}\operatorname{arctg} 3 + \frac{\pi k}{3}$; $-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \frac{\pi k}{3}$. **18.26.** а) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$; б) $\pm\frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{4}$.

18.27. а) $\operatorname{arctg} 5 + \pi k$; $-\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi k$; б) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$; $\operatorname{arctg} 2 + \pi k$; в) $\frac{\pi}{4} + \pi k$; $-\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi k$; г) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$; $\operatorname{arctg} 3 + \pi k$.

18.28. а) $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $-\frac{\pi}{6} + \pi k$; б) πk; $-\operatorname{arctg} 1{,}5 + \pi k$.

18.29. а) $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$; $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi k}{2}$; б) $\frac{\pi k}{4}$; $-\frac{1}{4}\operatorname{arctg} 1{,}5 + \frac{\pi k}{4}$.

18.30. а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $2\operatorname{arctg} 3 + 2\pi k$; б) $\frac{3\pi}{2} + 3\pi k$; $\frac{\pi}{2} + 3\pi k$. **18.31.** а) $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$; б) $-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \frac{\pi k}{3}$. **18.32.** а) $-2\operatorname{arctg} 3 + 2\pi k$; б) $-\pi + 3\pi k$. **18.33.** а) $0, \pi, -\pi, 4, -4$; б) $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 0, 7$. **18.34.** а) $1, \frac{3}{4}, -\frac{\pi}{4}, \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ $(k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$; б) $1, \frac{4}{3}, \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$. **18.35.** а) $\{-1, 1\}$; б) $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

ГЛАВА 4

§ 19

19.10. а) 0; б) $\frac{1}{2}$; в) 1; г) $\frac{1}{2}$. **19.11.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $-\frac{1}{2}$.

19.12. а) $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$; б) $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{8}$. **19.13.** а) $(-1)^k\frac{\pi}{42} + \frac{\pi k}{7}$; б) $\pm\frac{5\pi}{72} + \frac{\pi k}{6}$.

19.14. а) $\pi + 2\pi k$; б) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$. **19.15.** а) $15°$; б) $75°$. **19.16.** а) $\frac{\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{9\pi}{4}$; б) $-\frac{5\pi}{8}$; $-\frac{\pi}{8}$; $\frac{3\pi}{8}$; $\frac{7\pi}{8}$. **19.17.** а) $\frac{4\sqrt{3} + 3}{10}$; б) $-\frac{3}{5}$; в) $\frac{4}{5}$; г) $\frac{4 - 3\sqrt{3}}{10}$.

19.18. а) $\frac{12\sqrt{3} + 5}{26}$; б) $\frac{12}{13}$; в) $\frac{-5\sqrt{3} + 12}{26}$; г) $\frac{5}{13}$. **19.19.** а) $-\frac{13}{85}$; б) $\frac{84}{85}$.

19.20. а) $-\frac{36}{85}$; б) $-\frac{13}{85}$. **19.21.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$. **19.22.** а) 1; б) 1.

19.23. а) $(-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k$; б) $\pm\frac{\pi}{3} + 4\pi k$. **19.24.** а) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$; б) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $\pi + 2\pi k$;

в) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; г) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k$. **19.25.** а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$; б) $2\pi k$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$;

в) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; г) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$. **19.26.** а) $\frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{2} < x < \frac{5\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}$;

б) $\frac{1}{7}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{2\pi k}{7} < x < \frac{2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)}{7} + \frac{2\pi k}{7}$;

в) $-4\arcsin\frac{1}{3} + 8\pi k < x < 4\pi + 4\arcsin\frac{1}{3} + 8\pi k$;

г) $-\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3} < x < \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3}$.

§ 20

20.3. а) $\frac{1}{5}$; б) $-\frac{41\sqrt{3} + 80}{23}$; в) $-1\frac{1}{3}$; г) $-\frac{3}{13}$. **20.4.** а) 1; б) $\frac{1}{7}$. **20.5.** а) $\frac{11}{13}$;

б) $\frac{1}{17}$. **20.7.** а) 1; б) 1. **20.9.** а) $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{4}$; б) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$. **20.10.** а) $-\frac{11\pi}{12}$, $\frac{\pi}{12}$,

$\frac{13\pi}{12}$; б) $-\frac{17\pi}{30}$, $-\frac{\pi}{15}$, $\frac{13\pi}{30}$, $\frac{14\pi}{15}$, $\frac{43\pi}{30}$, $\frac{29\pi}{15}$. **20.11.** а) -2; б) $-\frac{3}{2}$. **20.12.** а) $-\frac{1}{2}$;

б) $-1\frac{1}{6}$. **20.13.** а) $-2\frac{3}{7}$; б) $\frac{7}{17}$. **20.14.** а) $-\frac{25\sqrt{3} + 48}{39}$; б) $\frac{25\sqrt{3} - 48}{39}$.

20.16. arctg 3.

§ 21

21.9. а) $-\frac{120}{169}$; б) $\frac{119}{169}$; в) $-\frac{120}{119}$; г) $-\frac{119}{120}$. **21.10.** а) $\frac{24}{25}$; б) $\frac{7}{25}$;

в) $\frac{24}{7}$; г) $\frac{7}{24}$. **21.11.** а) $\frac{\sqrt{14}}{4}$, $\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\frac{\sqrt{7}}{7}$, $\sqrt{7}$; б) $-\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\frac{2}{\sqrt{5}}$, -2, $-\frac{1}{2}$.

21.12. а) $-\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\frac{3}{\sqrt{10}}$, -3, $-\frac{1}{3}$; б) $-\frac{3}{\sqrt{10}}$, $-\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\frac{1}{3}$, 3. **21.13.** а) $\operatorname{tg}\frac{t}{2}$;

б) $\cos\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2}$; в) $2\sin 2t$; г) $\frac{1}{\cos 2t + \sin 2t}$. **21.14.** а) $2\sin t$; б) -1;

в) $\cos 2t$; г) 2. **21.15.** а) $\sin 2t$; б) $-\operatorname{tg} 2t$. **21.16.** а) $\cos 2t$; б) $-2\sin\frac{t}{2}$.

21.23. а), в) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$; б), г) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. **21.24.** а) $\frac{\pi}{2}+\pi k$; б) πk; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$;

в) πk; г) $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$. **21.25.** а) $(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$; б) $\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{8}$;

в) $\pm\frac{\pi}{2}+3\pi k$; г) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$. **21.26.** а) $2\pi k$; $\pi+4\pi k$; б) $\pi+2\pi k$; $4\pi k$.

21.27. а) $2\pi k$; б) $2\pi k$; $\frac{\pi}{2}+2\pi k$. **21.28.** а) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$; б) $\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{8}$; в) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$;

г) $\pm\frac{4\pi}{3}+4\pi k$. **21.29.** а) 0; π; 2π; б) $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; в) 0; π; 2π; г) $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{6}$.

21.30. а) $\frac{1}{8}$; б) $\frac{1}{16}$. **21.31.** а) 1; б) 0. **21.33.** а) 2, -1; б) 3, -1.

21.34. а) $-120°$; б) $-240°$. **21.35.** а) πk; $\operatorname{arctg} 3+\pi k$; б) $\frac{\pi k}{2}$; $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2+\frac{\pi k}{2}$.

21.36. а) 0; π; 2π; б) $\frac{7\pi}{9}$. **21.37.** $\pm\frac{\pi}{9}$; $\pm\frac{17\pi}{9}$. **21.38.** а) 2; б) 4.

§ 22

22.7. а) -1; б) $-\sqrt{3}$. **22.10.** а) $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$; б) $\frac{\pi k}{8}$; в) $\frac{\pi k}{2}$; $\frac{\pi k}{3}$; г) $\frac{\pi k}{7}$;

$\frac{\pi}{20}+\frac{\pi k}{10}$. **22.11.** а) $\frac{\pi k}{2}$; $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$; б) $\frac{\pi k}{4}$; $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$.

22.12. а) $2\sin\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$; б) $2\sin\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$;

в) $4\cos\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$; г) $\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$. **22.13.** а) $4\sin 6x\cos^2\frac{x}{2}$;

б) $4\cos x\cos^2\frac{3x}{2}$. **22.14.** а) $4\cos t\cos\frac{t}{2}\sin\frac{5t}{2}$; б) $-4\sin t\sin 2t\cos 5t$.

22.16. а) $\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi k}{5}$; б) $\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi k}{3}$; в) $\frac{\pi}{40}+\frac{\pi k}{10}$; $\frac{\pi}{20}+\frac{\pi k}{5}$; г) $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}$.

22.17. а) $\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{8}$; $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$; б) $\frac{\pi k}{6}$; в) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}$; $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$; г) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$; $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}$.

22.18. а) $\frac{2\pi k}{7}$; $\frac{2\pi k}{3}$; б) $\frac{\pi}{14}+\frac{\pi k}{7}$. **22.19.** а) $\frac{\pi k}{6}$, но $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$; б) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}$;

в) $\frac{\pi k}{2}$; г) $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $\pi + 2\pi k$. **22.20.** а) $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$;

б) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$; $(-1)^k \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}$. **22.21.** а) 3 корня; б) 2 корня. **22.22.** а) $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{9}$; $\frac{2\pi}{9}$;

$\frac{\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{9}$; $\frac{5\pi}{9}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{9}$; б) $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{4}$.

§ 23

23.4. а) πk; б) $\frac{\pi}{6} + \pi k$; **23.5.** а) $\frac{\pi n}{2}$; $\pm\frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4} + \pi n$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi n$; $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$. **23.7.** а) $\frac{1}{4}$ $(\sin 24° - \sin 4° + \sin 12° + \sin 8°)$; б) $\cos 35° - \cos 45° + \cos 5° - \cos 15°$. **23.8.** а) 1; б) $\frac{1}{4}$. **23.9.** а) 1; б) 2. **23.10.** а) πk; $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi k$; в) πk; г) $2\pi k$; $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$. **23.11.** а) $\pm\frac{\pi}{6}$; б) $\pm\frac{\pi}{4}$.

23.12. а) $y_{наиб} = \frac{3}{4}$, $y_{наим} = -\frac{1}{4}$; б) $y_{наиб} = \frac{1}{4}$, $y_{наим} = -\frac{3}{4}$.

ГЛАВА 5

§ 24

24.3. а) 3; −3; $-\frac{3}{2}$; 0; $3 \cos 0{,}4\pi$; б) −1; 1; −1; 1; −1; в) 0; 1; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{2}$; $\sin^2 \frac{\pi}{5}$; г) 1; −1; 1; −1; 1. **24.4.** 1027. **24.7.** а) 3^n; б) $(n + 2)^2$; в) n^3; г) $n^3 + 1$. **24.8.** а) $\frac{1}{2^{n-1}}$; б) $\frac{2n+1}{2n+2}$; в) $\frac{1}{n^3}$; г) $\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$. **24.10.** а) 2; б) 5; в) 13; г) 45. **24.11.** а) Нет; б) да; в) да; г) нет. **24.12.** а), в) Ограничены снизу. **24.13.** б), в), г) Ограничены сверху. **24.14.** а), б), в) Ограничены. **24.15.** а) Возрастает; б) убывает; в) возрастает; г) убывает. **24.16.** а) Не является монотонной; б) возрастает; в) возрастает; г) возрастает. **24.19.** а) 0; б) 6; в) 0; г) −4. **24.20.** а) 5; б) 7; в) 3; г) $\frac{2}{3}$. **24.21.** а) 0; б) 0; в) 0; г) 0.

24.22. а) 2; б) 1; в) −1; г) −2.

§ 25

25.3. а) 4; б) $57\frac{1}{6}$; в) 0,9; г) 156,25. **25.4.** а) −5,4; б) $\frac{3}{2}\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)$; в) $38\frac{1}{9}$; г) $4\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)$. **25.8.** а) $2\frac{2}{9}$; б) −0,128; в) −0,022; г) $3\frac{1}{9}$. **25.9.** а) 12,5;

б) $-8\frac{2}{3}$; в) 9; г) −36. **25.10.** $41\frac{2}{3}$. **25.11.** $b_1 = 12$; $q = 0{,}5$. **25.12.** $b_1 = 12$; $q=\frac{1}{3}$. **25.13.** а) $\frac{\sin x}{1-\sin x}$; б) $\frac{\cos x}{1+\cos x}$; в) $\operatorname{ctg}^2 x$; г) $\frac{1}{1+\sin^3 x}$. **25.14.** а) 0,8; б) 0,3. **25.15.** а) $\frac{5}{33}$; б) $\frac{11}{90}$; в) $\frac{2}{11}$; г) $\frac{116}{495}$.

§ 26

26.8. а) 0; б) −2; в) 0; г) 6. **26.9.** а) 1; б) 1,5; в) 1; г) $1\frac{1}{6}$. **26.10.** а) 4; б) 0; в) 0; г) 2. **26.16.** а) 3; б) 1; в) −13; г) $3\frac{4}{15}$. **26.17.** а) 3; б) 1,4; в) 3; г) $\frac{7}{9}$. **26.18.** а) 0; б) −4; в) 10; г) $-\frac{1}{6}$. **26.19.** а) 0; б) 0. **26.22.** а) 0,2; б) − 0,1; в) 0,1; г) 0,05. **26.24.** а) $3\Delta x$; б) $-2x\Delta x - (\Delta x)^2$; в) $-2\Delta x$; г) $4x\Delta x + 2(\Delta x)^2$. **26.25.** а) $2ax\Delta x + a(\Delta x)^2$; б) $-\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}$.

§ 27

27.8. а) 2 м/с, 2 м/с^2; б) 4,2 м/с, 2 м/с^2; в) 4 м/с, 2 м/с^2; г) 7 м/с, 2 м/с^2. **27.10.** а) 2,2 м/с; б) 1,4 м/с; в) 2 м/с; г) 1,2 м/с. **27.11.** а) $2t$ м/с; б) $2t-1$ м/с; в) $2t$ м/с; г) $2t-2$ м/с. **27.13.** а) $f'(-7) < f'(-2)$; б) $f'(-4) < f'(2)$; в) $f'(-9) < f'(0)$; г) $f'(-1) > f'(5)$.

§ 28

28.18. а) $\frac{x^2(x+3)}{(x+2)^2}$; б) $-\frac{2x}{(x^2-1)^2}$; в) $\frac{2x(3-2x)}{(3-4x)^2}$; г) $\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.

28.23. а) 14; б) 1,5; в) 5; г) 72. **28.24.** а) −3; б) $\frac{4}{3}$; в) $-\frac{1}{2}$; г) $-\frac{4}{15}$. **28.25.** а) 2; б) 1; в) −1; г) −16. **28.26.** а) π; б) $2\frac{1}{3}$; в) 0; г) $-\frac{5+3\sqrt{3}}{6}$. **28.27.** а) $\frac{1}{49}$; б) $\frac{1}{16}$. **28.31.** а) $3\cdot 7^7$; б) −2; в) 3; г) $-1\frac{1}{8}$. **28.32.** а) 10; б) 1,75; в) $-\frac{48}{361}$; г) $-\frac{5}{8}$. **28.33.** а) 0; б) 12; в) $-\sqrt{3}$; г) $-\frac{4}{9}$. **28.34.** а) 3,5; б) 1,6;

в) -8; г) $-0{,}5$. **28.35.** а) $\frac{1}{16}$; б) $\pm\frac{3\pi}{8}+\pi n,\ n\in Z$; в) $\frac{1}{4}$; г) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$.

28.36. а) $x>\frac{3}{4}$; б) $-\sqrt{3}<x<-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}<x<\sqrt{3}$.

28.37. а) $\frac{\pi}{4}+\pi k<x<\frac{3\pi}{4}+\pi k$; б) $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k<x<-\frac{\pi}{6}+2\pi k$.

28.38. а) $-\frac{3}{4}<x<0$; $x>0$; б) $x<\frac{2}{5}$; $x>\frac{2}{5}$. **28.39.** а) $-\frac{\pi}{2}+\pi n<x<\pi n$;

б) $\pi n<x<\frac{\pi}{2}+\pi n$. **28.40.** а) $x<0$; $x>2$; б) $0<x<4$; в) $x<0$; $0<x<\frac{3}{4}$;

г) $\frac{\pi}{3}+\pi n<x<\frac{2\pi}{3}+\pi n$. **28.41.** а) $\frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\frac{3\pi}{2}+2\pi n$; б) $-3<x<-1$;

$1<x<3$. **28.42.** а) 1; 16; б) $\sqrt[3]{4}$. **28.43.** а) $x<0$; $x>3$; б) таких значений нет;

в) $\frac{\pi}{3}+\pi n<x<\frac{\pi}{2}+\pi n$; $\frac{\pi}{2}+\pi n<x<\frac{2\pi}{3}+\pi n$; г) $-\frac{\pi}{2}+\pi n<x<\frac{\pi}{4}+\pi n$.

28.44. а) $\frac{12-\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$; б) таких значений нет; в) 9; г) таких значений нет.

28.45. а) 2; б) 0; -4; в) $2\frac{2}{3}$; г) $\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi k}{4}$. **28.46.** а) $\pm\sqrt{3}$, $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\pm\sqrt{2}$, ±1.

§ 29

29.8. а) 135°; б) 45°. **29.9.** а) 45°; б) 135°. **29.10.** а) 30°; б) 135°. **29.11.** а) 150°; б) 135°. **29.12.** а) $y=6x-9$; б) $y=2-x$; в) $y=3x-2$; г) $y=7$. **29.13.** а) $y=7x-10$; б) $y=5x-17$. **29.14.** а) $y=3x-4$; б) $y=-x+4$. **29.15.** а) $y=1$; б) $y=1$. **29.16.** а) $y=\frac{\pi}{2}-2x$; б) $y=\frac{2}{3}x$.

29.17. $y=-6x+18$; $y=6x+18$. **29.18.** $y=5x-16$; $y=-5x-1$.

29.19. $x_1=0$, $y=x+1$; $x_2=2$, $y=x-3$. **29.20.** а) $x=1$; б) $x=-\frac{1}{4}$;

в) $x=\frac{3}{8}$; г) $x=-0{,}5$. **29.21.** а) $x=3$; б) $x_1=0$; $x_2=\sqrt{2}$; $x_3=-\sqrt{2}$; в) $x=1$;

г) $x_1=0$; $x_2=0{,}6$. **29.22.** а) $x=\pi+2\pi n$; б) $x=\frac{\pi}{3}n$; в) $x=\pi n$; г) $x=\frac{3\pi}{2}+3\pi k$.

29.23. а) $y = x - \frac{8}{3}$; $y = x - \frac{4}{3}$; б) $y = 9x - 20$; $y = 9x + 16$. **29.24.** а) 0,99; б) 1,025; в) 1,21; г) 1,9975. **29.25.** а) $y = -0{,}1x + 2{,}8$, $y = -0{,}5x + 2$; б) $y = -0{,}5x + 2$. **29.26.** $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$. **29.27.** $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1)$, $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 1)$.

§ 30

30.11. а) Возрастает; б) убывает; в) возрастает; г) убывает. **30.12.** а) Убывает на $(-\infty; 2{,}5]$, возрастает на $[2{,}5; +\infty)$; б) убывает на $(-\infty; -1{,}5]$, возрастает $[-1{,}5; +\infty)$; в) возрастает на $(-\infty; 4]$, убывает на $[4; +\infty)$; г) убывает на $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$, возрастает на $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **30.13.** а) Возрастает на R; б) возрастает на $[-5; 3]$; убывает на $(-\infty; -5]$ и на $[3; +\infty)$; в) возрастает на $(-\infty; -2]$ и на $[3; +\infty)$; убывает на $[-2; 3]$; г) убывает на $(-\infty; -1]$ и на $[1; +\infty)$; возрастает на $[-1; 1]$. **30.14.** а) Убывает на $(-\infty; -1]$ и на $[0; 1]$; возрастает на $[-1; 0]$ и на $[1; +\infty)$; б) убывает на R; в) возрастает на $(-\infty; 1]$; убывает на $[1; +\infty)$; г) возрастает на R. **30.15.** а) Убывает на $(-\infty; -3)$ и на $(-3; +\infty)$; б) возрастает на $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$ и на $\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$; в) убывает на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$; г) убывает на $(-\infty; -1{,}5)$ и на $(-1{,}5; +\infty)$. **30.16.** а) Возрастает на $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$; б) возрастает на $\left(-\infty; \frac{15}{16}\right]$; убывает на $\left[\frac{15}{16}; 1\right]$; в) убывает на $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$; г) возрастает на $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$; убывает на $[1; +\infty)$. **30.24.** а) При $a = \pm 3$; б) при $a = \pm 5$. **30.26.** а) $x = -2$ — точка минимума, $x = 2$ — точка максимума; б) $x = -1$, $x = 1$ — точки максимума, $x = 0$ — точка минимума; в) $x = -\frac{4}{9}$ — точка максимума, $x = 0$ — точка минимума; г) $x = -2$, $x = 2$ — точки минимума, $x = 0$ — точка максимума. **30.27.** а) $x = -2$ — точка максимума, $x = 2$ — точка минимума; б) точек экстермума нет, функция возрастает на $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$; в) $x = -5$ — точка максимума, $x = 5$ — точки минимума; г) $x = 3$ — точка минимума. **30.28.** а) $x = 2$ — точка максимума, $x = 3$ — точка минимума; б) $x = -3$ — точка максимума, $x = 3$ — точка минимума; в) $x = -\frac{1}{3}$ — точка максимума, $x = 5$ — точка минимума; г) $x = 7$ — точка максимума,

$x = 0$ — точка минимума. **30.29.** а) $x = 0{,}6$ — точка максимума, $x = -0{,}6$ — точка минимума; б) $x = -1$, $x = 4$ — точки минимума, $x = 0$ — точка максимума; в) $x = -5$, $x = 5$ — точки минимума, $x = 0$ — точка максимума; г) $x = -3$ — точка максимума, $x = 1$ — точка минимума. **30.30.** а) $x = -2$ — точка максимума, $x = 2$ — точка минимума, б) $x = -3$ — точка максимума, $x = 3$ — точка минимума. **30.31.** а) $x = 3$ — точка минимума, б) $x = 8{,}5$ — точка максимума. **30.32.** а) $x = -\frac{\pi}{6}$ — точка минимума, $x = -\frac{5\pi}{6}$ — точка максимума; б) $x = \frac{5\pi}{3}$ — точка минимума, $x = \frac{7}{3}\pi$ — точка максимума.

§ 31

31.13. б) При $a = 3$. **31.14.** б) При $a > 9$. **31.15.** а) При $a < -2$ или $a > 2$; б) $a = \pm 2$.

§ 32

32.6. а) 28; 3; б) 9; −3; в) 16; −2; г) −7; −199. **32.8.** а) 19; −35; б) 35; 15; в) 19; −93; г) 19; 15. **32.9.** а) 173; −2; б) −43; −72; в) 45; 173; г) −2; −72. **32.10.** а) 4; −3; б) −12; −28; в) 4; −28; г) 4; −28. **32.11.** а) 20; −7; б) 4; −124; в) 121; −44; г) 148; −124. **32.12.** а) 6; 5; б) −3; −4. **32.13.** а) $y_{\text{наиб}} = \frac{\pi}{4} + 1$, $y_{\text{наим}} = \frac{3\pi}{4} - 1$; б) $y_{\text{наиб}} = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{3}$, $y_{\text{наим}} = -\pi$; в) $y_{\text{наиб}} = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$, $y_{\text{наим}} = -\frac{\pi}{2}$; г) $y_{\text{наиб}} = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{3}$, $y_{\text{наим}} = 0$. **32.14.** а) $y_{\text{наиб}}$ не существует, $y_{\text{наим}} = -\frac{5}{27}$; б) $y_{\text{наиб}}$ не существует, $y_{\text{наим}} = -1$; в) $y_{\text{наиб}} = 0$, $y_{\text{наим}}$ не существует; г) $y_{\text{наиб}}$ не существует, $y_{\text{наим}} = 0$. **32.15.** а) $y_{\text{наиб}} = -2$, $y_{\text{наим}}$ не существует; б) $y_{\text{наиб}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y_{\text{наим}} = 0$; в) $y_{\text{наиб}} = -2$, $y_{\text{наим}}$ не существует; г) $y_{\text{наиб}} = 3{,}5$, $y_{\text{наим}}$ не существует. **32.16.** а) 8, $1\frac{3}{4}$; б) 17, −3.

32.17. а) $\left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$; б) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$. **32.18.** а) $\left[-\frac{4\sqrt{6}}{9}; +\infty\right)$; б) $\left(-\infty; \frac{\sqrt{3}}{9}\right]$.

32.19. [−17; 10]. **32.20.** 12, 12. **32.21.** 22, 22. **32.22.** −49, 49. **32.23.** 2 + 1. **32.24.** 1,25 + 3,75. **32.25.** 14 см, 14 см. **32.26.** 50 × 50 м. **32.27.** 4 × 4 м. **32.28.** 50 × 50 м. **32.29.** 32 см^2. **32.30.** (1; 1), (−1; 1). **32.31.** (4, 2). **32.32.** 4 дм, 4 дм, 2 дм. **32.33.** 7м, 7м, 7м. **32.34.** $4\sqrt[3]{5}$ м; $6\sqrt[3]{5}$ м; $\frac{24\sqrt[3]{5}}{5}$ м. **32.35.** $\frac{d\sqrt{3}}{3}$.

32.36. 30 см. **32.37.** а) 6000; б) 108. **32.38.** а) 21; б) 32,4. **32.39.** $\sqrt{ab}$. **32.40.** 3 ч.

ГЛАВА 6

§ 33

33.4. а) Да; б) нет; в) нет; г) да. **33.10.** а) [2; 3]; б) [2; 3]; в) [2; 3]; г) [3; 4]. **33.15.** а) 1; 8; б) 1; 9; в) −7; 4; г) −4; −3. **33.18.** а) −; б) +; в) −; г) −.

§ 34

34.8. а) (0; 0), (1; 1); б) (0; 0), (1; 1); в) (0; 0), (1; 1); г) (−1; −1). **34.9.** а) 0; б) 1; в) 1; г) −1; 0. **34.10.** а); б); в) одно решение; г) нет решений. **34.16.** а) $[2; +\infty)$; б) $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$; в) $[4; +\infty)$; г) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

34.17. а) $(-\infty; -6] \cup [2; +\infty)$; б) $[-3; 5]$; в) $(-\infty; 2] \cup [6; +\infty)$; г) $[-4; 1]$.

34.18. а) $\left(-\infty; -1\frac{2}{3}\right) \cup [8; +\infty)$; б) $x \neq -1\frac{1}{3}$; в) $x \neq 3{,}5$; г) $\left(-4{,}5; \frac{3}{7}\right]$.

34.19. а) $[0; +\infty)$; б) $(-\infty; +\infty)$; в) $(-\infty; +\infty)$; г) $[0; +\infty)$. **34.20.** а) $[2; +\infty)$; б) $(-\infty; +\infty)$; в) $[-3; +\infty)$; г) $(-\infty; +\infty)$. **34.21.** а) 0; б) 1.

§ 35

35.16. а) $\sqrt[4]{26} > \sqrt{5}$; б) $\sqrt[3]{5} < \sqrt{3}$; в) $\sqrt[3]{7} > \sqrt[6]{47}$; г) $-\sqrt[4]{4} > -\sqrt[3]{3}$. **35.18.** а) $\sqrt[4]{27b^5}$; б) $\sqrt[6]{32a^8}$; в) $\sqrt[6]{a^8}$; г) $\sqrt[6]{3y^5}$. **35.19.** а) $\sqrt[6]{4a^3b^3}$; б) $\sqrt[10]{a^{13}b^8}$; в) $\sqrt[6]{125a^7b^{10}}$; г) $\sqrt[24]{216x^7z^{23}}$. **35.20.** а) $\sqrt[4]{a}$; б) $\sqrt[12]{b^{-5}}$; в) $\sqrt[12]{a^7}$; г) $\sqrt[20]{a^{11}b^{21}}$. **35.25.** а) 200; б) $\frac{1}{2}$. **35.26.** а) 2; б) −2; в) 3; г) 2. **35.27.** а) 0; 64; б) 16; 81; в) $\frac{1}{64}$; г) 1.

§ 36

36.6. а) $|a|\sqrt{b}$; б) $a\sqrt[3]{b}$; в) $|a|\sqrt[4]{b}$; г) $a^2\sqrt{ab}$. **36.10.** а) $\sqrt[3]{3}$; б) $4\sqrt[7]{3}$; в) $7\sqrt[5]{2}$; г) $3\sqrt[4]{2}$. **36.11.** а) $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[6]{18}$; $\sqrt{3}$; б) $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[15]{40}$; $\sqrt[5]{4}$; в) $\sqrt[5]{3}$; $\sqrt[15]{30}$; $\sqrt[3]{2}$; г) $\sqrt[6]{3}$; $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[4]{4}$. **36.15.** а) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$; б) $\sqrt[3]{k^2}-\sqrt[3]{kl}+\sqrt[3]{l^2}$; в) $\sqrt[3]{m^2}+\sqrt[3]{mn}+\sqrt[3]{n^2}$; г) $\sqrt{x}-2\sqrt{y}$. **36.16.** а) $\frac{\sqrt{2b}-\sqrt{3}}{\sqrt{3b}-1}$; б) $\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}{1-\sqrt[3]{y}}$; в) $\frac{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{3k}}{\sqrt[4]{k}-\sqrt[4]{2}}$; г) $\frac{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{d}}{\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{ad}}$.

36.17. а) $\sqrt[4]{a}-\sqrt[3]{b}$; б) $\frac{1}{\sqrt[3]{m}+2\sqrt[3]{n}}$; в) $\frac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}}$; г) $a\sqrt{a}+\sqrt[4]{b}$. **36.18.** а) $\sqrt[4]{a}+\sqrt[3]{b}$; б) $x\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{x^3}+1$; в) $\sqrt[4]{b}-a\sqrt{a}$; г) $\sqrt[3]{a}+\sqrt[6]{ab^3}+b$. **36.19.** а) $\sqrt[3]{2mn^2}$; б) $\sqrt[10]{9x^4y^7}$; в) $\sqrt[15]{64k^2l^5}$; г) $\sqrt[35]{2p^3q^6}$. **36.20.** а) $\sqrt[10]{8}$; б) $\sqrt[24]{\frac{1024}{243}}$; в) $\sqrt[18]{\frac{32}{243}}$; г) $\sqrt[3]{9}$.

36.21. а) $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$; б) $5\sqrt[4]{x} + 5\sqrt{xy}$. **36.22.** а) $-\sqrt[5]{2\sqrt[4]{10}} < -\sqrt[4]{\sqrt[5]{99}}$; б) $\sqrt{2\sqrt[3]{3}} < \sqrt[3]{5}$; в) $\sqrt[4]{3} > \sqrt[8]{6\sqrt{2}}$; г) $-\sqrt{2\sqrt[3]{6}} > -\sqrt[3]{5\sqrt{2}}$.

36.23. а) $\sqrt[3]{5\sqrt{3}}$; $\sqrt[6]{100}$; $\sqrt{3\sqrt[3]{4}}$; б) $\sqrt[6]{3\sqrt[5]{3}}$; $\sqrt[5]{4}$; $\sqrt[10]{25}$; в) $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{2\sqrt[5]{2}}$; $\sqrt[5]{3\sqrt{4}}$; г) $\sqrt[48]{7\sqrt{7}}$; $\sqrt[4]{2\sqrt{1{,}25}}$; $\sqrt[16]{64}$. **36.24.** а) -1; б) 3; в) 1; г) $\frac{1}{3}$. **36.25.** а) $1 - a$; б) $m - n$. **36.26.** а) $\sqrt[3]{3ax} - \sqrt[3]{3bx}$; б) $\sqrt[3]{4x} - \sqrt[3]{5y}$.

36.27. а) $(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$; б) $(\sqrt[3]{4} + \sqrt[4]{2})(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{y^3})$; в) $(a + b)(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})$; г) $\sqrt{ab}\,(1 + \sqrt{b})(1 - \sqrt{ab})$. **36.28.** а) $(\sqrt[8]{m} - 3)(\sqrt[8]{m} + 2)$; б) $(\sqrt[4]{m} + 2)(\sqrt[4]{m} + 3)$; в) $(\sqrt[10]{a} + 4)(\sqrt[10]{a} + 3)$; г) $(\sqrt[6]{x} - 1)(2\sqrt[6]{x} + 1)$.

36.29. а) $\frac{3\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x}}$; б) $\frac{\sqrt[4]{x} - 2}{3\sqrt[4]{x} - 1}$. **36.30.** а) $\frac{b}{b - a}$; б) $(\sqrt{m} - \sqrt{n})^2$.

36.31. а) 8; б) 27.

§ 37

37.6. а) 243; б) 0,064; в) $\frac{81}{16}$; г) 0,01. **37.10.** а) $\frac{7}{25}$; б) $\frac{1}{2700}$. **37.19.** а) a; б) $\frac{1}{\sqrt[5]{c^4}}$; в) x^2; г) 1. **37.20.** а) 10; б) 4; в) $\frac{1}{49}$; г) 125. **37.21.** а) 4; б) 9; в) 8; г) 1. **37.22.** а) 12; б) 6; в) 30; г) 20. **37.23.** а) $\frac{1}{m}$; б) $\frac{4}{x}$; в) $\sqrt{x}$; г) $\frac{x^3}{27}$. **37.24.** а) $x^{\frac{2}{5}}$; б) y; в) c^2; г) a^5b^4. **37.29.** а) $\frac{1}{c^{\frac{1}{2}} - d^{\frac{1}{2}}}$; б) $m^{\frac{1}{3}} + m^{\frac{1}{3}}$.

37.30. а) $1 + c$; б) $m^{\frac{1}{2}} + m^{\frac{2}{3}}$; в) $x + y$; г) $-2\sqrt[4]{bc}$. **37.31.** а) $4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$; б) $a^3 + 25a$.

37.32. а) $x - 1$; б) $\sqrt{k} - \sqrt{l}$. **37.33.** а) $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$; б) $\frac{x + y}{x - y}$.

§ 38

38.15. а) 4; б) 1; в) 0; 1; г) 8. **38.16.** а) (1; 1); б) (1; 1); в) (0; 0), (1; 1); г) (1; 1). **38.20.** а) $2x^{\frac{1}{4}}$; б) $3x$; в) $\frac{1}{3}x^{\frac{1}{4}}$; г) x^{-2}. **38.21.** а) $\frac{1}{4}x^{-2}$; б) x^4; в) $9x^{\frac{2}{3}}$; г) x^{-8}. **38.27.** а) 1,5; б) 1; в) -3; г) 2. **38.28.** а) $\frac{3}{4}$; б) $-1\frac{2}{9}$; в) $\frac{2}{3}$; г) 0.

38.29. а) $\frac{5\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{4}$. **38.30.** а) $y = -4x$; б) $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$; в) $y = 16x - 32$; г) $y = \frac{11}{27} - \frac{1}{27}x$. **38.31.** а) Убывает на [0; 4], возрастает на [4; +∞); $x = 4$ — точка минимума, $y_{\min} = -\frac{8}{3}$; б) возрастает на [0; 1], убывает на [1; +∞), $x = 1$ — точка максимума, $y_{\max} = \frac{1}{2}$. **38.32.** а) $-\frac{8}{3}$; 0; б) $y_{\text{наиб}} = \frac{1}{2}$; $y_{\text{наим}}$ не существует; в) $y_{\text{наим}} = -\frac{8}{3}$; $y_{\text{наиб}}$ не существует; г) −2; $\frac{1}{2}$. **38.34.** а) $0 \leqslant x < 4$; б) $x \geqslant 1$; в) $x \geqslant 1$; г) $0 \leqslant x < 8$. **38.36.** а) $y = x + 3$; б) $y = 4 - 3x$ и $y = -4 - 3x$. **38.37.** а) $x = \frac{1}{4}$ — точка максимума; б) $x = -\frac{4}{3}$ — точка минимума. **38.38.** а) 2; б) 2. **38.39.** а) $y = \frac{1}{4}x + 1$; б) $y = 3x$.

ГЛАВА 7

§ 39

39.10. а) $\frac{7}{3}$; б) 1; в) −1,5; г) $\frac{3}{5}$. **39.12.** а) 4; б) 3,5; в) −0,5; г) −5,5. **39.13.** а) 2; б) −3; в) 2,5; г) −4,5. **39.19.** а) $2^{-\sqrt{2}}$, 1, $2^{\frac{1}{3}}$, $2^{1,4}$, $2^{\sqrt{2}}$, $2^{1,5}$. б) $0{,}3^{9}$, $0{,}3^{\frac{1}{2}}$, $0{,}3^{\frac{1}{3}}$, 1, $0{,}3^{-\sqrt{5}}$, $0{,}3^{-9}$. **39.23.** а) $x \leqslant -4$; б) $x < -2$; в) $x \geqslant -3$; г) $x > -8$. **39.26.** [−1; 5]. **39.27.** [−4; 3]. **9.31.** а) 1; б) −1; в) 1; г) −1. **39.32.** а) 2; б) −2; в) 0; г) −1. **39.33.** а) $x > 0$; б) $x < 0$; в) $x > 0$; г) $x < 0$. **39.34.** а) $x > 1$; б) (−∞; +∞); в) $x > 2$; г) (−∞; +∞). **39.35.** а) $x < -1$; б) нет таких значений; в) $x > 0$; г) $x < 1$. **39.36.** а) $f(-3) = -8$; $f(-2{,}5) = -6{,}5$; $f(0) = 1$; $f(2) = 4$; $f(3{,}5) = 8\sqrt{2}$. **39.37.** а) $f(-3) = \frac{1}{64}$; $f(-2{,}5) = \frac{1}{32}$; $f(0) = 1$; $f(1) = 0$; $f(2) = -3$. **39.38.** а) $f(-5) = 32$; $f(-2{,}5) = 4\sqrt{2}$; $f(0) = 1$; $f(4) = 3$; $f(1{,}69) = 2{,}3$. **39.39.** а) $f(-3) = 64$; $f(-2) = 16$; $f\left(-\frac{3}{2}\right) = 8$; $f(0) = 1$; $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0$. **39.40.** а) (0; +∞); б) (0; +∞); в) (0; +∞); г) (0; +∞). **39.41.** а) (1; +∞); б) (6; +∞); в) (−2; +∞); г) (−8; +∞).

§ 40

40.6. а) −2; б) −8; в) 2; г) 0,2. **10.7.** а) ±1; б) 0; в) ±1; г) $\pm\sqrt{3}$. **40.8.** а) −2; б) 1,5; в) 3; г) $\frac{2}{3}$. **40.9.** а) −1; б) 2,5. **40.10.** а) $-\frac{1}{3}$, 3; б) −6, −2. **40.11.** а) $\frac{1}{6}$; б) $1\frac{5}{18}$. **40.12.** а) 2; 5; б) ±2; в) 8; г) 3. **40.13.** а) 1; б) 1; в) −3;

г) 0,4. **40.14.** а) 1, 2; б) 2; в) -1; г) 0. **40.15.** а) ± 1; б) ± 1; в) 1; г) 1. **40.16.** а) ± 1; б) 1; в) 1; г) 1. **40.17.** а) 3; б) -3; в) ± 1; г) -2. **40.18.** а) 6; б) 5. **40.19.** а) 0; б) 0; в) 0; г) 0. **40.20.** а) 0; б) 0. **40.21.** а) 4; б) 2. **40.22.** а) -1; б) 1. **40.23.** а) -1; б) -1; в) 1; г) 0. **40.24.** а) -2; б) 1; в) -1; г) 2. **40.25.** а) 2; б) 1, 2. **40.26.** а)—г) 0. **40.27.** а) 1; б) -1; в) -1; г) 1. **40.28.** а) (1; 3); б) (1; -2); в) (2; 1); г) (-1; 3). **40.29.** а) (2; 1); б) ($-0{,}6$; 0,2); в) (-1; 2); г) (2,2; $-0{,}4$). **40.34.** а) $x < -5$; б) $x \geqslant -1$; в) $x \geqslant 7$; г) $x > 1$. **40.35.** а) $x \leqslant -0{,}8$; б) нет решений; в) $x \geqslant -5$; г) $-\infty < x < +\infty$. **40.36.** а) $x \geqslant 0{,}5$; б) $x \leqslant \frac{1}{4}$; в) $x > -\frac{1}{2}$; г) $x > 13{,}5$. **40.37.** а) $2 < x < 3$; б) $-2 \leqslant x \leqslant 3$; в) $-2 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$; г) $4 < x < 6$. **40.38.** а) $-\infty < x < +\infty$; б) $x < 1$; $x > 3$; в) $-2 \leqslant x \leqslant 1$; г) $\frac{1}{3} < x < 4$. **40.39.** а) $x \leqslant 2$; б) $x < 1$; в) $x < -1\frac{2}{3}$; г) $x \leqslant \frac{1}{6}$. **40.40.** а) $0 \leqslant x \leqslant 1$; б) $x \geqslant 0$; в) $x < 0$; $x > 1$; г) $x > 0$. **40.41.** а) $x \leqslant -1$; $x \geqslant 1$; б) $-1 < x < 1$; в) $x > 1$; г) $x \leqslant 1$. **40.42.** а) $x > 0$; б) $x \geqslant 0$; в) $x \geqslant 0$; г) $x < 0$. **40.43.** а) $x \leqslant 1$; б) $x < 0$; в) $x \geqslant 1$; г) $x > -2$. **40.44.** а) $x < -2$; $x \geqslant 1{,}5$; б) $-\frac{1}{7} < x < 2$; в) $-6 < x \leqslant 1{,}8$; г) $x < 2$; $x > 6$. **40.45.** а) $0 < x < 4$; б) $0 < x \leqslant \frac{1}{7}$; в) $0 < x < 2$; г) $x \leqslant -\frac{1}{6}$; $x > 0$. **40.46.** а) $x \leqslant 2$; б) $x < 2$; в) $x \leqslant 2$; г) $x > 2$. **40.47.** а) 2; б) 4. **40.48.** а) -1; б) 1; в) 0; г) -1. **40.49.** а) 5; б) 3; в) 5; г) 2. **40.50.** а) $x = 1$; б) $(-\infty; +\infty)$.

§ 41

41.5. а) 4; б) 5; в) $-2\frac{1}{3}$; г) -6. **41.6.** а) 0; б) 2,5; в) 9; г) $-\frac{1}{3}$. **41.8.** а) 72; б) 28; в) $\frac{5}{9}$; г) 24,5. **41.9.** а) 9; б) $\frac{1}{8}$; в) 16; г) $\frac{1}{9}$. **41.14.** а) 3; б) $\frac{1}{16}$; в) 2; г) $\frac{1}{512}$. **41.16.** а) $\log_3 14 - 1$; б) $\frac{\log_4 10 + 4}{5}$; в) $3 - \log_{\frac{2}{7}} 11$; г) $\frac{8 - \log_{\sqrt{5}} 6}{9}$. **41.17.** а) 1; $\log_2 3$; б) 0; $\log_4 5$; в) 1; $\log_3 4$; г) 1; $\log_7 2$. **41.18.** а) $x \geqslant \log_2 9$; б) $x \leqslant \log_{12} 7$; в) $x > -\log_3 4$; г) $x < -1$. **41.19.** а) $x \leqslant 1$; $x \geqslant \log_2 3$; б) $0 \leqslant x \leqslant \log_4 5$; в) $1 < x < \log_3 4$; г) $-\infty < x < +\infty$.

§ 42

42.5. а) $\log_2 0{,}1$, $\log_2 \frac{1}{6}$, $\log_2 0{,}7$, $\log_2 2{,}6$, $\log_2 3{,}7$; б) $\log_{0,3} 17$, $\log_{0,3} 3$, $\log_{0,3} 2{,}7$, $\log_{0,3} \frac{2}{3}$, $\log_{0,3} \frac{1}{2}$. **42.6.** а) $\log_3 4 < \sqrt[3]{9}$; б) $\log_{0,5} 3 < \sin 3$; в) $\log_2 5 > \sqrt[3]{7}$;

г) $\lg 0{,}2 < \cos 0{,}2$. **42.9.** а) $\left[\frac{1}{9}; 81\right]$; б) [2; 8]. **42.10.** а) −2; б) не существует.

42.11. а) 3; б) $\frac{1}{2}$; в) 5; г) $\frac{1}{3}$. **42.19.** а) $x \geqslant 1$; б) $0 < x < 1$; в) $0 < x \leqslant 1$; г) $x > 1$.

42.20. а) $0 < x \leqslant 3$; б) $x > \frac{1}{2}$; в) $x \geqslant 5$; г) $0 < x < \frac{1}{3}$. **42.21.** а) $f(-8) = 27$; $f(-6) = 21$; $f(0) = 3$; $f(3) = -1$; $f(9) = -2$. **42.23.** а) $(-\infty; 2) \cup (3; \infty)$; б) $(-7; 2)$; в) $(-\infty; 1) \cup (12; \infty)$; г) $(-1; 9)$. **42.24.** а), б), в), г) $(-\infty; \infty)$.

§ 43

43.4. а) 1; б) −1; в) 5; г) 1. **43.5.** а) −0,25; б) −2,5. **43.6.** а) $3c$; $4a$. **43.7.** а) $a + 1$; б) $m + 1$. **43.8.** а) $b - 1$; б) $n - 1$. **43.9.** а) $x = 8$; б) $x = 64$; в) $x = \frac{1}{7}$; г) $x = \frac{1}{1000}$. **43.10.** а) $x = 1{,}5$; б) $x = 12$; в) $x = 40$; г) $x = \frac{1}{3}$. **43.11.** а) $x = \frac{392}{27}$; б) $x = 18$; в) $x = \frac{3^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{1}{3}}}$; г) $x = \sqrt{5}$.

43.13. а) 4; б) −1,5; в) −12; г) 3. **43.14.** а) 20; б) 3,2; в) 24; г) $\frac{3}{64}$. **43.15.** а) 64; б) 49; в) 9; г) 216. **43.16.** а) 27; б) 169; в) 25; г) 625. **43.17.** а) 18; б) 5; в) 35; г) 3. **43.18.** а) 3,5; б) $2\frac{3}{11}$; в) 2; г) 3,5. **43.19.** а) 3; б) 2. **43.20.** а) 2; б) $\frac{2}{3}$; в) 2; г) $\frac{5}{6}$. **43.22.** а) 0,5; б) $-\frac{1}{6}$. **43.29.** а) 2; б) 2; в) 3; г) 5. **43.32.** а) −1; б) 1; в) 1; г) 1. **43.33.** а) $a + b$; б) $2a + b$; в) $a + 2b$; г) $3a + 2b$. **43.34.** а) $\log_3 4 > \sqrt[4]{2}$; б) $\log_2 3 > \sqrt[3]{7}$.

§ 44

44.2. а) 2; 3; б) 10; в) 7; г) −10. **44.3.** а) −7; 3; б) 1; 9; в) 5; 7; г) 3; 5. **44.4.** а) 2,9; б) −4, 3; в) −3; 6; г) −5; 2. **44.5.** а) 1; б) 2; в) 2; −4; г) нет корней. **44.6.** а) 2; 8; б) $\frac{1}{4}$; 16; в) 2; 4; г) 0,04; 125. **44.7.** а) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\frac{1}{25}$; б) $\sqrt[3]{4}$; 16; в) 0,0081; $\frac{\sqrt{30}}{3}$; г) $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$; 4. **44.9.** а) 5; б) 4; в) 3; г) 2. **44.10.** а) 3; б) нет решений; в) 4; г) −1. **44.11.** а) 1; б) нет решений; в) 2; 4; г) −4. **44.12.** а) 2; б) 3. **44.13.** а) 100; б) 81; в) 10; г) 32. **44.14.** а) $\frac{1}{10}$; б) $\frac{1}{100}$; 100.

44.15. а) 0, 1; б) 0, 1. **44.16.** а) $\frac{1}{9}$; 9; б) $\frac{1}{4}$; 4; в) $\frac{1}{4}$; 4; г) $\frac{1}{9}$; 9. **44.17.** а) $\frac{1}{9}$; 3;

б) $\frac{1}{8}$; 2; в) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{16}$; г) $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{27}$. **44.18.** а) (1; 1); (2; 4); б) (−12; 31); в) (2; 3).

44.19. а) (2; 3); (3; 2); б) (3; 6). **44.20.** а) (4; 1); б) (4; 4). **44.21.** а) (1; 3); (3; 1); б) (1; 2). **44.22.** а) (2; 1); б) (−1; −4).

§ 45

45.3. а) $-\frac{1}{3} < x < 8$; б) $0 < x \leqslant 12$; в) $0 < x < 1{,}25$; г) $1{,}5 < x < 6$.

45.4. а) $1\frac{1}{3} < x < 2$; б) $x > 1$; в) $1{,}8 < x \leqslant 9$; г) $1 \leqslant x < 1\frac{1}{3}$.

45.5. а) $1{,}8 < x \leqslant 5$; б) $-\frac{1}{6} < x \leqslant 7$; в) $x < 0$; г) $x < -1$. **45.6.** а) $2 < x < 3$; б) нет решений; в) $-10 \leqslant x < -2\sqrt{2}$; г) $x > 14$. **45.7.** а) $x \leqslant -3$; $2 \leqslant x < 6$; б) $0 < x < 2$; $x > 11$; в) нет решений; г) $3\sqrt{3} < x < 9$. **45.8.** а) $x < -1$; $x > 8$; б) $x \leqslant -1$; $x \geqslant \frac{1}{2}$; в) $2 < x < 4$; г) $0 < x \leqslant \frac{1}{9}$; $1 \leqslant x < 1\frac{1}{9}$.

45.9. а) $0 < x < 2$; $x > 8$; б) $2 < x < 4$; в) $\frac{1}{16} \leqslant x \leqslant 4$; г) $0 < x \leqslant \frac{1}{25}$; $x \geqslant 125$. **45.10.** а) $x > 9$; б) $x > 3$; в) $0 < x \leqslant 5$; г) $0 < x \leqslant 2$.
45.11. а) $0 < x < 1$; $3 < x < 4$; б) $1 \leqslant x \leqslant 6$; в) $2 < x < 5$; г) $0 < x \leqslant 1$; $9 \leqslant x < 10$. **45.12.** а) $0 < x \leqslant 0{,}04$, $x \geqslant \frac{1}{\sqrt{5}}$; б) $0{,}0081 \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{30}}{3}$; в) $\sqrt[3]{4} < x < 16$; г) $0 < x < \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$, $x > 9$. **45.13.** а) $\sqrt[4]{0{,}5} \leqslant x \leqslant 16$; б) $\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{1}{\sqrt[4]{27}}$; в) $\frac{1}{27} < x < \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$; г) $\frac{1}{5^8} < x < \sqrt[4]{5}$. **45.14.** а) 2; б) 1; в) 3; г) 6.

45.15. а) 6; б) 0; в) 2; г) 4. **45.16.** а) $x > 2$; б) $0{,}25 < x < 0{,}8$. **45.17.** а) $x > 5$; б) $\frac{1}{2} < x \leqslant 2$. **45.18.** а) Нет решений; б) $1 \leqslant x \leqslant 3$.

§ 46

46.1. а) 0; б) 2; в) 0; г) −1. **46.2.** а) $\frac{1}{a}$; б) $-\frac{1}{a}$; в) $\frac{2}{a}$; г) $-\frac{2}{a}$. **46.3.** а) $\frac{2}{b}$; б) $-\frac{2}{b}$; в) $\frac{3}{b}$; г) $-\frac{4}{b}$. **46.4.** а) a; б) $\frac{1 + 2a}{3}$; в) $2a$; г) $\frac{1 + 3a}{3}$. **46.7.** а) 16; б) 27. **46.8.** а) 9, $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$; б) 8, $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **46.9.** а) 20; б) 4; в) 16,5; г) 18. **46.10.** а) 6; б) 6.

46.11. а) $1 + \frac{b}{2a}$; б) $\frac{2b + a}{a + b}$; в) $-\frac{b}{a}$; г) $-\frac{3a + b}{b}$. **46.12.** а) $\frac{a + b}{b}$; б) $\frac{2a + b}{3}$; в) $\frac{1}{2}b + \frac{1}{4}a$; г) $\frac{2 + b}{a + b}$. **46.13.** а) $\frac{1}{9}$; 3; б) 5; 25; в) 343; $\frac{1}{49}$; г) 2; 512. **46.14.** а) 4; б) 7. **46.15.** а) 0,5, 1; б) −0,25. **46.16.** а) $-3 < x < -\frac{1}{9}$; б) $x < -4$; $-\frac{1}{8} < x < 0$.

§ 47

47.4. а) $\frac{4e}{3}$; б) $-\frac{1}{2e}$; в) $\frac{4}{e^2}$; г) −9,9. **47.5.** а) −1; б) −1; в) $5-e$; г) 3. **47.6.** а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{3}{4}\pi$; в) $\frac{3}{4}\pi$; г) $\frac{\pi}{6}$. **47.7.** а) $y = ex$; б) $y = e^2x - e^2$; в) $y = x + 1$; г) $y = \frac{x}{e} + \frac{2}{e}$. **47.8.** а) $y = 3x$; б) $y = 0,5$; в) $y = -2x + 2$; г) $y = 1$. **47.11.** а) Возрастает на $(-\infty; -2]$, $[0; +\infty)$, убывает на $[-2; 0]$, $x = 0$ — точка минимума, $x = -2$ — точка максимума; б) возрастает на $[-0,5; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 0,5]$, $x = -0,5$ — точка минимума; в) убывает на $(-\infty; -3]$, возрастает на $[-3; +\infty)$, $x = -3$ — точка минимума; г) убывает на $(-\infty; 0]$ и на $(0; 1)$, возрастает на $[1; +\infty)$, $x = 1$ — точка минимума. **47.12.** а) 0; e; б) 0; e; в) $\frac{1}{e}$; $\frac{4}{e^2}$; г) e; $9e^3$. **17.16.** а) $y = 4x - 3$; б) $y = x - 1$; в) $y = -4x + 2e$; г) $y = x - 1$. **47.17.** а) $y = 2x - \frac{1}{2}$; б) $y = \frac{7}{e}x - \frac{11}{e}$; в) $y = 4e^2x - 3e^3$; г) $y = -2x + 3$. **47.18.** а) Убывает на $(0; 1]$, возрастает на $[1; +\infty)$, $x = 1$ — точка минимума; б) убывает на $(0; 1]$, возрастает на $[1; +\infty)$, $x = 1$ — точка минимума. **47.19.** а) Возрастает на $\left(-\infty; \ln\frac{1}{2}\right]$ и на $[0; +\infty)$; убывает на $\left[\ln\frac{1}{2}; 0\right]$; $x = \ln\frac{1}{2}$ — точка максимума, $x = 0$ — точка минимума; б) убывает на $(-\infty; 0]$ и на $[\ln 1,5; +\infty)$; возрастает на $[0; \ln 1,5]$; $x = 0$ — точка минимума, $x = \ln 1,5$ — точка максимума. **47.20.** а) Возрастает на $(0; 2]$ и на $[3; +\infty)$; убывает на $[2; 3]$; $x = 2$ — точка максимума, $x = 3$ — точка минимума; б) возрасает на $[1; +\infty)$; убывает на $[0; 1]$; $x = 1$ — точка минимума. **47.21.** а) 1; $e - 1$; б) $e - 1$; $e^2 - 2$. **47.22.** а) $-4 + \ln 4$, −1; б) $1,4 - \ln 4$. **47.23.** а) $y = 2ex$; б) $y = x - \frac{1}{3} + \ln 3$. **47.24.** а) −5; б) $-\frac{13}{6}$; в) $\frac{9}{7}$; г) нет решений. **47.25.** а) $(-\infty; +\infty)$; б) $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right)$; в) $(-\infty; -2)$; г) $\left(-\infty; -2\frac{1}{3}\right)$. **47.26.** а) $y = \frac{e}{2}x$; б) $y = \frac{1}{e}x$; в) $y = \frac{e}{3}x$; г) $y = \frac{3}{e}x$. **47.27.** а) −1; б) −1. **47.28.** а) $a \in (-7; -1] \cup [0; 6)$; б) $a \in (-1; 0)$; в) $a \in (-\infty; -7] \cup \cup [6; +\infty)$; г) нет таких a.

ГЛАВА 8

§ 48

48.8. а) x; б) $-\cos x$; в) $\operatorname{tg} x$; г) $-\operatorname{ctg} x$. **48.9.** а) $-\frac{1}{3}\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$; б) $-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$; в) $\frac{1}{4}\sin(4x-3)$; г) $2\cos\left(2-\frac{x}{2}\right)$. **48.10.** а) $\frac{1}{6(6x+1)}$; б) $\frac{2}{7}\sqrt{7x-9}$; в) $\frac{-1}{7(7x-3)}$; г) $-\frac{2}{3}\sqrt{42-3x}$. **48.11.** а) $-\frac{1}{2}\cos 2x$; б) $\frac{1}{2}e^{2x-5}-\frac{1}{3}\sin 3x$; в) $2\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; г) $\frac{1}{4}\sqrt[3]{(3x-1)^4}-\frac{1}{7}\ln|2-7x|$. **48.12.** а) $-\cos x+\frac{3}{4}$; б) $\operatorname{tg} x-2$; в) $\sin x+0{,}5$; г) $-3\operatorname{ctg}\frac{x}{3}+3$. **48.13.** $s=t^2+t-1$.

48.14. $S=\frac{4}{3}\cos 3t+\frac{2}{3}$. **48.15.** $S=6\sqrt{2t+1}-3$. **48.16.** $s=\frac{1}{6}(1+t)^4+\frac{1}{3}t+\frac{5}{6}$; $v=\frac{2}{3}(1+t)^3+\frac{1}{3}$. **48.17.** а) $-4\cos x+3$; б) $\sin x+15$; в) $\sin x+7$; г) $\sin x+14$. **48.18.** а) $x^2+3x+2{,}25$; б) $(3x-1)^4$. **48.19.** 8. **48.20.** а) $x^2+\frac{9}{4}$; б) $\frac{3}{4}x^4+7$. **48.21.** а) $x=2$ — точка максимума, $x=3$ — точка минимума; б) $x=1$ — точка минимума, $x=5$ — точка максимума; в) $x=-2$ — точка максимума, $x=2$ — точка минимума; г) $x=-3$ — точка минимума, $x=0$ — точка максимума. **48.22.** а) $F(a)>F(b)$; б) $F(a)<F(b)$.

§ 49

49.1. а) $\frac{65}{324}$; б) $\frac{2}{3}$; в) 6,6; г) 2. **49.2.** а) 1; б) 2; в) 2; г) 1. **49.4.** а) $\frac{2}{e}(e^2-1)$; б) $\frac{e^4-1}{2e}$; в) $4(e^2-1)$; г) $\frac{e^2}{2}(e-1)$. **49.5.** а) $-\frac{3}{8}\left(1-3\sqrt[3]{3}\right)$; б) $\frac{3}{8}$; в) 87,5; г) $\frac{3}{5}\left(2-\sqrt[3]{3}\right)$. **49.6.** а) $\ln 2$; б) $e^2-e+\ln 2$; в) $0{,}1\ln 2$; г) $\frac{1}{2}(e^4-e^2)+2\ln 2$.

49.7. а) $\frac{1}{2}\ln 2{,}2$; б) $\frac{1}{5}\ln\frac{11}{6}$; в) $\frac{1}{4}\ln 3$; г) $\ln 4$. **49.8.** а) 12 см; б) 1,2 см; в) 27 см; г) $\frac{6}{7}$ см. **49.9.** а) 60; б) $\frac{1}{6}$; в) $9\frac{1}{3}$; г) $\frac{1}{3}$. **49.10.** а) 9,5; б) 6,5.

49.11. а) $21\frac{1}{3}$; б) 20,5; в) 9; г) 6,6. **49.12.** а) 8; б) $10\frac{2}{3}$; **49.13.** а) 0,5; б) 4;

49.14. а) 1; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sqrt{2}$; г) $\sqrt{2}$. **49.15.** а) $\pi+1$; б) π; **49.16.** а) $5\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{1}{4}$; г) $2\frac{2}{3}$. **49.17.** а) 16; б) 54. **49.18.** а) e^3-1; б) $\frac{e^4-1}{e^4}$; в) $\frac{e^2-1}{e}$;

г) $e^2 - 1$. **49.19.** а) $\frac{(e-1)^2}{e}$; б) $e - 2$; в) $e^2 - 2$; г) $2(e^2 - 1)$. **49.20.** а) 1; б) $\ln 3$; в) 2; г) $\frac{1}{3} \ln 10$. **49.21.** а) $e^3 - e^2 + \ln \frac{2}{3}$; б) $4 - \ln 5$; в) $4\frac{2}{3} - \ln 4$; г) $e - 2$. **49.22.** а) 12; б) $\frac{\pi}{2} - 1$; в) $10\frac{2}{3}$; г) 2. **49.23.** а) 4,5; б) $1\frac{1}{3}$; в) $10\frac{2}{3}$; г) 4,5. **49.24.** а) $2\frac{2}{3}$; б) $21\frac{1}{3}$; **49.25.** а) $2\frac{2}{3}$; б) 9. **49.26.** а) $2\frac{1}{3}$; б) $2\frac{1}{3}$; **49.27.** а) $19\frac{2}{3}$; б) 4,75. **49.28.** а) 4π; б) $6{,}25\pi$. **49.29.** а) 2π; б) $\frac{\pi}{4}$. **49.30.** а) $\frac{\pi}{2} + 1$; б) $\frac{16}{3}(2\pi + 3\sqrt{3})$. **49.31.** а) 4,5; б) 4,5. **49.32.** а) $\frac{6-\pi}{12}$; б) $\frac{4(3+\pi)}{3\pi}$; в) $\frac{6-\pi}{6}$; г) $\frac{4(3+\pi)}{3\pi}$. **49.33.** а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{1}{12}$. **49.34.** а) 6,75; б) 6,75.

ГЛАВА 9

§ 50

50.1. а) 2,2, 3,3,3,3,3, 4,4,4,4,4,4,4,4,4, 5,5,5,5; б) мода 4, ее кратность 9;
в)

	Варианта				Сумма
	двойка	тройка	четверка	пятерка	
Кратность	2	5	9	4	20

г) 3,75.

50.2. а) 4, 2, 2, 0, 4, 1, 4, 3, 1, 2; б) 0, 1,1, 2,2,2, 3, 4,4,4

	Варианта					Сумма
	0	1	2	3	4	
Кратность	1	2	3	1	3	10
Частота	0,1	0,2	0,3	0,1	0,3	1
Частота, %	10	20	30	10	30	100

г) 2,3.

50.3. а) 7,2; б) 67 000; в) № 1—980, № 2—960, № 3—1000, № 4—400, № 5—990; г) нет, не пройдет, так как за нее проголосовало 4330 избирателей — менее 6,5 % участников.

50.4. а) 9 вариант; объем равен 50; б) 8 — размах, 7 — мода;
в)

	Варианта									Сумма
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Кратность	5	6	3	7	4	11	5	4	5	50

г) 6,04.

50.5. а) Частота букв «т» и «у» равна $\frac{2}{17}$, всех остальных — $\frac{1}{17}$; б) всего 38 букв, из них 10 букв «г, р, о, м»; частота равна $\frac{10}{38}$, в процентах —

примерно 26 %; в) мода буква «с», ее кратность равна 6; г) 6, 2, 1, 9, 4 / 5, 4, 2, 4 / 5, 4, 1, 3, 7 / 1, 1, 3, 4, 5, 5 / 4, 2, 7, 6, 4 / 1, 3, 8, 2, 6.

50.6. в)

	Число очков						Сумма
	1	2	3	4	5	6	
Результаты участников № 1, 2	76	61	76	65	64	58	400

г)

	Число очков						Сумма
	1	2	3	4	5	6	
Результаты участников № 1, 2, 3	103	101	99	104	94	99	600

50.7. в)

	Варианта				Сумма
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	
Кратность	20	$x = 5$	$y = 10$	15	50
Частота	0,4	0,1	0,2	0,3	1
Частота, %	40	10	20	30	100

г) варианта № 1.

50.8. а) $1,\ \underbrace{2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2}_{5},\ \underbrace{3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3}_{6},\ \underbrace{4,\ 4,\ \ldots,\ 4}_{8},\ \underbrace{5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5}_{5};$

б)

	Оценка по литературе					Сумма
	1	2	3	4	5	
Кратность	1	5	6	8	5	25

г) $M = \dfrac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 + 5 \cdot 5}{25} = 3{,}44.$

50.9. а) $\underbrace{1,\ 1}_{2},\ \underbrace{2,\ 2,\ 2}_{3},\ \underbrace{3,\ 3,\ \ldots,\ 3,\ 3}_{11},\ \underbrace{4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4}_{6},\ \underbrace{5,\ 5,\ 5}_{3};$

б)

	Оценка по русскому языку					Сумма
	1	2	3	4	5	
Кратность	2	3	11	6	3	25

г) $M = \dfrac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 11 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 3}{25} = 3{,}2.$

50.10. а) 4; б) 5;

в)

	Итоговая отметка				Сумма
	2	3	4	5	
Кратность	4	7	9	5	25

50.11. а)

	Кратность				
	1	5	6	8	5
Отклонение от среднего	−2,44	−1,44	−0,44	0,56	1,56
Квадрат отклонения	5,9536	2,0736	0,1936	0,3136	2,4336

Сумма квадратов равна $1 \cdot 5{,}9536 + 5 \cdot 2{,}0736 + 6 \cdot 0{,}1936 + 8 \cdot 0{,}3136 + 5 \cdot 2{,}4336 = 32{,}16$; $D = \dfrac{32{,}16}{25} = 1{,}2864$, $\sigma = \sqrt{D} \approx 1{,}134$;

б)

	Кратность				
	2	3	11	6	3
Отклонение от среднего	−2,2	−1,2	−0,2	0,8	1,8
Квадрат отклонения	4,84	1,44	0,04	0,64	3,24

Сумма квадратов равна $2 \cdot 4{,}84 + 3 \cdot 1{,}44 + 11 \cdot 0{,}04 + 6 \cdot 0{,}64 + 3 \cdot 3{,}24 = 28$; $D = \dfrac{28}{25} = 1{,}12$, $\sigma = \sqrt{D} \approx 1{,}0583$; в) по литературе; г) по русскому языку.

§ 51

51.1. а) 0,35; б) 0,65; в) 0,725; г) 0,725. **51.2.** а) 0,6; б) 0,4; в) 0,24; г) 0,4. **51.3.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{4}{9}$; в) $\frac{5}{9}$; г) 0. **51.4.** а) 0,96; б) 0,28; в) 0,2; г) 0,36. **51.7.** а) $\frac{50}{101}$; б) $\frac{20}{101}$; в) $\frac{100}{101}$; г) $\frac{95}{101}$. **51.8.** а) $\frac{25}{36}$; б) $\frac{5}{9}$; в) $\frac{11}{12}$; г) $\frac{8}{9}$. **51.9.** а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{13}{14}$; г) $\frac{15}{28}$. **51.10.** а) $\frac{32}{33}$; б) $\left(\frac{10}{33}\right)^2 \approx 0{,}092$; в) $1 - \left(\frac{12}{33}\right)^2 \approx 0{,}868$; г) $\frac{64}{33^2} \approx 0{,}059$. **51.11.** а) 0,5; б) 0,1; в) 0,2; г) 0,25. **51.12.** а) $\frac{4}{7}$; б) $\frac{2}{7}$; в) $\frac{3}{7}$; г) $\frac{1}{210}$.

§ 52

52.1. а) 42; б) 20; в) 24; г) 14. **52.2.** а) $5! = 120$; б) $(5!)^2 = 14400$; в) $5! \cdot 3! = 720$; г) $5! \cdot 4! = 2880$. **52.3.** а) 54; б) 1; в) 0; г) 5184. **52.4.** а) 401; б) 19; в) 4; г) 11. **52.5.** а) 2; б) 3; в) 6; г) 24. **52.6.** а) $C_{17}^2 = 136$; б) 17; в) 119; г) 17. **52.9.** а) 26; б) 6; в) 224; г) 0. **52.10.** а) 8; б) 6; в) 7; г) 4. **52.11.** а) $x = 9$ или $x = 10$; б) $x = 11$; в) 8; г) 31. **52.12.** а) 15; б) 5; в) 8; г) 12. **52.13.** а) 7; б) 8; в) 12; г) 3. **52.14.** а) $5! = 120$; б) $C_5^2 = 10$; в) $C_5^3 \cdot 2 = 20$; г) $4! = 24$. **52.15.** а) 210; б) 35;

в) 15; г) 10. **52.16.** а) $C_{36}^5 = 376992$; б) $C_{32}^1 = 32$; в) $C_9^5 = 126$; г) $4 \cdot C_9^5 = 504$. **52.17.** а) $10^5 = 100\,000$; б) $8^5 = 32\,768$; в) $2^5 = 32$; г) $2 \cdot 8^4 = 8192$. **52.18.** а) 12; б) 13; в) 12; г) 15. **52.19.** а) $C_{20}^3 = 1140$; б) $C_{12}^3 = 220$; в) 180; г) 748. **52.20.** а) 14 112; б) 10 976; в) 7056; г) 280.

§ 53

53.1. в) $x^{10} + 10x^8 + 40x^6 + 80x^4 + 80x^2 + 32$; г) $1 - 4x^3 + 6x^6 - 4x^9 + x^{12}$. **53.2.** а) $C_7^1 \cdot 1^6 \cdot 1^1 = 7$; б) $C_4^1 \cdot 1^4 \cdot 3^1 = 12$; в) $C_5^1 \cdot 3^4 \cdot (-2)^1 = -810$; г) $C_5^4 \cdot 1^1 \cdot 2^4 - C_4^3 \cdot 2^1 \cdot 1^3 = 72$. **53.3.** а) 108; б) -720; в) 8; г) $-\frac{4}{9}$. **53.4.** а) 60; б) $C_9^3 \cdot 3^6$. **53.5.** а) $10x^8$; б) $120x^4$; в) $210x^{-2}$; г) 252. **53.6.** а) C_{10}^5 — один член $C_{10}^5 a^5b^5$; б) $C_9^4 a^4b^5 + C_9^5 a^5b^4$.

§ 54

54.1. а) $\frac{33}{95}$; б) $\frac{14}{95}$; в) $\frac{48}{95}$; г) 1. **54.2.** а) $\frac{17}{70}$; б) $\frac{2}{35}$; в) $\frac{2}{35}$; г) $\frac{9}{70}$. **54.3.** а) $\frac{5}{42}$; б) $\frac{10}{21}$; в) $\frac{5}{14}$; г) $\frac{20}{21}$. **54.4.** а) 43,6; б) 41,3; в) 13,2; г) 1,77. **54.5.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{4}{15}$; в) 0,4. Заменить 30 на 29. **54.6.** а) 0,4; б) 0,48; в) 0,12. Заменить 50 на 48. **54.7.** а) Невозможное событие; б) дискриминант этого уравнения отрицателен; в) само событие A; г) невозможное событие. **54.8.** а) 0,75; б) 0,91; в) 0,99; г) 0,9901. **54.9.** а) 0,48; б) 0,08; в) 0,92; г) 0,44. **54.10.** а) $C_3^2 \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}3^1$, $P = 0{,}441$; б) $C_4^2 \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}3^2$, $P = 0{,}2646$; в) $C_5^3 \cdot 0{,}7^3 \cdot 0{,}3^2$, $P = 0{,}3087$. **54.11.** а) $C_4^4 \cdot p^4 \cdot q^0 = 0{,}25^4 \approx 0{,}004$; б) $C_4^0 \cdot p^0 \cdot q^4 = 0{,}75^4 \approx 0{,}316$; в) $C_4^3 \cdot p^3 \cdot q^{4-3} = 4 \cdot 0{,}25^3 \cdot 0{,}75 = 0{,}25^2 \cdot 0{,}75 \approx 0{,}047$; г) $1 - P_4(0) \approx 0{,}684$. **54.12.** а) 1; б) 1; в) 0; г) 0,5. **54.13.** а) 0,5; б) 0,5; в) 0,25; г) 0,25. **54.14.** а) 0,5; б) 0,5; в) 0,2; г) 0,21. **54.15.** а) $\frac{24}{25\pi} \approx 0{,}306$; б) 0,16; в) $\approx 0{,}7$; г) $\frac{24 - 4\pi}{25\pi} \approx 0{,}146$. **54.16.** а) 56,4; б) 84,9; в) 1,9; г) 0,13. **54.17.** а) 0,1; б) 0,3; в) 0,5; г) 0,6. **54.18.** а) $\frac{2}{15}$; б) $\frac{8}{15}$; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{13}{15}$. **54.19.** а) 138; б) 200; в) 162; г) 100. **54.20.** а) $\frac{8}{9}$; б) 0,8; в) 0,5; г) $\frac{1}{11}$. **54.21.** а) 0,8; б) 0,1; в) 0,6; г) 0,998.

54.22. а)

Число попаданий, k	0	1	2	3	4	5
$P_5(k) = C_5^k \cdot 0{,}4^k \cdot 0{,}6^{5-k}$	0,078	0,259	0,346	0,23	0,077	0,01

б) 0,01; в) 0,346 + 0,23 + 0,077 + 0,01 = 0,663; г) наибольшая вероятность получается при $k = 2$.

54.23. а) 0,01; б) 0,38; в) 0,25; г) 0,01. **54.24.** а) 0,25; б) 0,5; в) 0,5; г) 0,25.

54.25. а) $\frac{1}{27}$; б) $\frac{19}{27}$; в) и г) $\frac{7}{27}$.

ГЛАВА 10

§ 55

55.9. а) 1, 6; б) 0; в) 2, 6; г) нет корней. **55.10.** а) 2; б) $-\frac{1}{2}$; в) нет корней; г) −2,5; 2. **55.11.** а) 1, −3; б) 1, −4. **55.12.** а) 0, $\pm\frac{\pi}{2}$, ±2; б) 0, ±3; в) ±1; $\pm\frac{\pi}{4}$; г) 0, $\pm\pi$; ±4.

§ 56

56.2. а) 5,25; б) 11. **56.3.** а) $\frac{\pi}{4} + \pi n$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi n$; **56.4.** а) 6, 8; б) 0.

56.5. а) 1; 7; б) $2\frac{5}{6}$; **56.6.** а) 1, 3; б) 10, 0,001. **56.7.** а) 3, 0; б) ±2.

56.8. а) $\frac{\pi}{4} + \pi n$; б) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$. **56.9.** а) $-\frac{11}{23}$; б) 1. **56.10.** а) 0, 4, 5; б) −3, −1, 3. **56.11.** а) 0, 6; б) 0, 5. **56.12.** а) 2, −1; б) 2, 3. **56.13.** а) ±2; $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$; б) ±3; $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$. **56.14.** а) πn, $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $-\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n$; в) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $(-1)^n\frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}$; г) $2\pi n$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$. **56.15.** а) −1; $\frac{1}{2}$; б) ±1. **56.16.** а) 50; б) −34. **56.17.** а) $1\frac{1}{6}$; б) 1, −3,8. **56.18.** а) 1, 0; б) $-\log_5 10$; в) 0; г) 2, $\log_3 2 - 1$. **56.19.** а) ±1; б) 8, 16; в) $(-1)^n \arcsin\frac{1}{4} + \pi n$; г) 64. **56.20.** а) 10, $10^{-\frac{5}{4}}$; б) 0, 1; в) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; г) 1, 4. **56.21.** а) 0, ±1; б) 0, 1. **56.22.** а) 2; б) −1. **56.23.** а) 1, 2; б) $\frac{1}{2}$. **56.24.** а) 1, б) 9. **56.25.** а) 3, 4, −1, −2; б) 0, −3. **56.26.** а) 1; б) 2,5. **56.27.** а) 5; 7,5; б) 2; 4.

56.28. а) 1; б) 1; в) 1; $\frac{25}{9}$; г) −2. **56.29.** а) 1024; б) 1; в) 64; 4096; г) 1. **56.30.** а) 1; б) 1; 13. **56.31.** а) $\frac{1}{3}$; б) 5, $2\frac{1}{3}$. **56.32.** а) 6, −2; б) 4, −1. **56.33.** а) $\frac{\pi n}{3}$; б) $\frac{\pi n}{5}$. **56.34.** а) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6}, \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$; б) $\frac{\pi n}{2}, \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{9}, \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi n}{5}$. **56.35.** а) $\frac{\pi n}{5}, \frac{\pi n}{2}$; б) $\pi n, \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$. **56.36.** а) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$; б) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$. **56.37.** а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \pi + 2\pi n$; б) $-\frac{\pi}{4} + (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{2}}{10} + \pi n$. **56.38.** а) 1, $\log_2 5$; б) 1, $3\log_3 2$; в) 3, $\log_3 0{,}12$; г) 1, $\log_5 4$. **56.39.** а) −3; $(-1)^n\frac{\pi}{3} + \pi n$ $(n \in \boldsymbol{Z}, n \geqslant 0)$; б) 8, 120, $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}(n \in \boldsymbol{Z}, n \geqslant 6)$. **56.40.** а) 2; б) 3. **56.41.** а) 1; б) 7. **56.42.** а) 2; б) −2.

§ 57

57.4. а) Нет решений; б) $8 \leqslant x \leqslant 11$. **57.5.** а) $x \geqslant 3$; б) $-1 < x \leqslant 8$. **57.6.** а) $x < -5$; $\frac{1}{3} < x < 1$; б) $x < -\frac{2}{7}$; $\frac{1}{2} < x < 7$. **57.7.** а) $-3 < x < -2$; $-2 < x < 4$; б) $-5 < x < -2$; $3{,}5 < x < 4$; $4 < x < 5$. **57.8.** а) $-\infty < x < +\infty$; б) $-1 \leqslant x \leqslant 0$; $x > 3$. **57.9.** а) $x > -\frac{1}{8}$; б) $x < 3$; $x > 3$. **57.10.** а) $x > 1$; б) $x > 3$. **57.11.** а) $2{,}5 < x \leqslant 3$; б) нет решений. **57.12.** а) $x \geqslant 2{,}25$; б) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$. **57.13.** а) $x \leqslant 1$; $x \geqslant 7$; б) $x = 1$. **57.14.** а) $x \geqslant 4$; б) $x \geqslant -2$; **57.15.** а) $0 < x < 5$; г) $x > 49$. **57.16.** а) $x \geqslant 1$; б) $x \leqslant 0$. **57.17.** а) $x \leqslant 1$; б) $x \leqslant 1$. **57.18.** а) $x > 64$; б) $2^{10} < x < 2^{20}$. **57.19.** а) $0 \leqslant x \leqslant 1$; б) $x < \log_5 0{,}1$. **57.20.** а) $8 < x < 16$; б) $0 < x \leqslant \frac{1}{27}$; $x \geqslant \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$. **57.21.** а) $1 < x \leqslant 1{,}25$; $x \geqslant 1{,}5$; б) $0{,}1 < x < 1$. **57.22.** а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$; б) $x = 2\pi n$. **57.23.** а) $x > 2$; б) $x \geqslant 0$; в) $x \leqslant 2$; г) нет решений. **57.24.** а) $0 < x < 4$; б) нет решений; в) $x \geqslant 4$; г) $x > 0$. **57.25.** а) $-\infty < x < +\infty$; б) $x = -\frac{\pi}{2}$; в) $x = 0$; г) $-\infty < x < +\infty$. **57.26.** а) $x \geqslant -1{,}5$; б) $x \leqslant \frac{5}{3}$. **57.27.** а) $0 < x < 9$; б) $0 < x < 4$. **57.28.** а) $-2 < x \leqslant -1$; $x \geqslant 2$; б) $x \geqslant 3$, $x = -4$. **57.29.** а) $\frac{4}{3} \leqslant x \leqslant \log_2 3$; б) $0 < x \leqslant \frac{4}{3}$; $x \geqslant \sqrt[3]{3}$. **57.30.** а) $x > 1$; б) $-1 < x < 5$; в) $x < -8$, $x > \frac{1}{3}$; г) $-7 < x < 0$. **57.31.** а) $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2} < x \leqslant 2$; б) $-4 \leqslant x < -\pi$, $-\pi < x < 0$. **57.32.** а) $\frac{\pi}{2}$; б) 0, $\pm 2\pi$. **57.33.** а) $-2 \leqslant x < 1$, $1 < x \leqslant 4$; б) $x < -4$, $x > 3$.

§ 58

58.11. а) $x = 7 - 2k$, $y = k$, где $k \in Z$; б) $x = k$, $y = 17 - 5k$, где $k \in Z$. **58.12.** а) $x = 1 - 2k$, $y = 7k - 3$, где $k \in Z$; б) $x = 12k - 5$, $y = 7k - 3$, где $k \in Z$; **58.13.** а) (4; 1), (−4; −1), (−1; −1), (1; 1); б) (5; −1), (3; 1), (−5; 1), (−3; −1). **58.23.** а) 3,2; б) 144. **58.24.** а) $\frac{7}{8}$; б) $\frac{9}{32}$; в) $\frac{1}{8}$; г) $\frac{7}{24}$.

§ 59

59.1. а) (1; 2), (1,5; 1,5); б) (2; 3), (3; 2); в) (−1; −2); г) (3; −1); (9; −4). **59.2.** а) (0; −1); б) $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$; **59.3.** а) (−1; 2); б) (4; 1); в) (1; 1), (1; −1); г) (8; 1). **59.4.** а) $\left(\frac{1}{8}; 9\right)$; б) $\left(\pi + 2\pi k; \pm\frac{\pi}{6} + \pi k\right)$; в) $\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right)$; г) $\left((-1)^k\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}\right)$. **59.5.** а) (2; 1); б) (1; −2). **59.6.** а) (3; 2); б) (8; 2). **59.7.** а) (2; 6), (−2; 10); б) (5; 3), (3; 1). **59.8.** а) 2; б) 3; в) 7; г) 1. **59.9.** а) (1; 2), (2; 1); б) (2; −4), (4; 0). **59.10.** а) (−1; 1); б) (1; 1). **59.11.** а) (1; 1), (1,4; 0,2); б) (2; 1); **59.12.** а) $\left(\frac{3\pi}{4} + \pi(n + k); -\frac{\pi}{4} + \pi(n - k)\right)$; б) (2; 1); (−2; 1); (2; −1), (−2; −1). **59.13.** а) (a; $3a$), где $a > 0$; б) $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. **59.14.** а) (3; 0); б) (2; −1). **59.15.** а) (2; 2); (−2; −2); б) (7; −1), (−1; −3). **59.16.** а) (4; 4), (3; 2); б) (1; 2). **59.17.** а) (8; 27), (27; 8); б) (16; 1). **59.18.** а) (3; 1), (2; 1,5); б) (−4; 0), $\left(-\frac{40}{9}; -\frac{32}{9}\right)$. **59.19.** а) (1; 4); $\left(\frac{49}{9}; \frac{16}{9}\right)$; б) (4; 1). **59.20.** а) (2; 3), (3; 2); б) (42; 39). **59.21.** а) $\left((-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k; \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)$, $\left((-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k; \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$; б) $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$, $\left(\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$. **59.22.** а) (2; −1; 1); б) (−1; 2; 0). **59.23.** а) (1; −2; −1), (−3; 2; −5); б) (2; 0; −1), $\left(-\frac{20}{11}; \frac{14}{11}; \frac{3}{11}\right)$. **59.24.** а) $y = 2x^2 - 5x + 1$; б) $y = 3x^2 - 2x + 1$. **59.25.** а) 143. **59.26.** 3, 9, 27. **59.27.** 4.

§ 60

60.1. а) $m \neq 1$; б) таких значений m нет; в) $m = 1$. **60.2.** а) $b \neq \pm 1$; б) $b = -1$; в) $b = 1$. **60.3.** а) $x = \frac{1}{a + 2}$, если $a \neq \pm 2$; x — любое действительное число, если $a = 2$; нет корней, если $a = -2$; б) $x = a$, если $a \neq -1$, 0; x — любое действительное число, если $a = -1$; нет корней, если $a = 0$. **60.4.** а) $x \geqslant m + 1$, если $m > 1$; $x \leqslant m + 1$, если $m < 1$; $-\infty < x < +\infty$, если $m = 1$; б) $x > \frac{1}{b+1}$, если $b < -1$, $b > 1$; $x < \frac{1}{b+1}$, если $-1 < b < 1$; $-\infty < x < +\infty$, если $b = -1$; нет решений, если $b = 1$. **60.5.** а) $x \geqslant \frac{b+2}{b}$, если $b > 1$, $b < 0$; $x \leqslant \frac{b+2}{b}$, если $0 < b < 1$; $-\infty < x < +\infty$, если $b = 0$, $b = 1$; б) $x \leqslant a$, если $a > 0$, $a < -1$; $x \geqslant a$, если $-1 < a < 0$; $-\infty < x < +\infty$, если $a = -1$; нет решений, если $a = 0$. **60.6.** а) $a < 0$; $0 < a < 1$; $a > 4$; б) $a = 0, 1, 4$; в) $1 < a < 4$. **60.7.** а) -9; б) 4. **60.8.** а) $b \geqslant 1$; б) $b \geqslant 3$. **60.9.** а) $a \geqslant -7$; б) $a \geqslant -5$. **60.10.** а) $a > 4$; б) $a < -1$. **60.11.** а) $a < -4$; б) $a > 20$. **60.12.** а) $x \geqslant 2$, если $a \leqslant 2$; $x \geqslant a$ или $x = 2$, если $a > 2$; б) $a < x < 6$, если $a < 6$; нет решений, если $a \geqslant 6$. **60.13.** а) 1; б) 2. **60.14.** а) $a < -\frac{2}{5}$; б) $-\frac{5}{4} < a < \frac{1}{4}$. **60.15.** а) $a = 1$; $a = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$; б) $a > \sqrt{2}$. **60.16.** а) $a \leqslant 3$, $a \geqslant 27$; б) $a > -1$. **60.17.** а) $a = \frac{13}{4}$, $a \leqslant 1$;

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Мордкович Александр Григорьевич,
Денищева Лариса Олеговна,
Корешкова Татьяна Александровна и др.

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

10—11 классы

В двух частях

Часть 2

ЗАДАЧНИК
для учащихся общеобразовательных учреждений
(базовый уровень)

Генеральный директор издательства *М. И. Безвиконная*
Главный редактор *К. И. Куровский*
Редактор *С. В. Бахтина*
Оформление и художественное редактирование: *Т. С. Богданова*
Технический редактор *И. Л. Ткаченко*
Корректоры *Л. В. Аввакумова, Л. А. Ключникова*
Компьютерная верстка: *А. А. Горкин*

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.003577.04.09 от 06.04.2009.

Подписано в печать 15.06.09. Формат 60×90 1/16. Бумага офсетная № 1.
Гарнитура «Школьная». Печать офсетная. Усл. печ. л. 15,0.
Доп. тираж 100 000 экз. Заказ № 23141 (К-Sm).

Издательство «Мнемозина». 105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б.
Тел.: 8 (499) 367 5418, 367 5627, 367 6781; факс: 8 (499) 165 9218.
E-mail: ioc@mnemozina.ru www.mnemozina.ru

Магазин «Мнемозина»
(розничная и мелкооптовая продажа книг, «КНИГА — ПОЧТОЙ»).
105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б.
Тел./факс: 8 (495) 783 8284; тел.: 8 (495) 783 8285.
E-mail: magazin@mnemozina.ru

Торговый дом «Мнемозина» (оптовая продажа книг).
Тел./факс: 8 (495) 665 6031 (многоканальный). E-mail: td@mnemozina.ru

Отпечатано в ОАО «Смоленский полиграфический комбинат».
214020, г. Смоленск, ул. Смольянинова, 1.